Université de Rennes 2023-2024
Agrégation externe

Compléments sur l'équation des ondes

Miguel Rodrigues

Ces notes de cours sont consacrées à l'équation des ondes. Une partie du matériel discuté se trouve aussi dans [Eva10].

1 Modélisation

On se donne trois temps $T_1 < t_0 < T_2$, une vitesse $c > 0$ et l'on considère alors pour une inconnue réelle u définie sur $]T_1, T_2[\times\mathbf{R}$ l'*équation des ondes*

$$\partial_t^2 u - c^2\, \partial_x^2 u = 0\,, \qquad \text{sur }]T_1, T_2[\times\mathbf{R} \tag{1.1}$$

complétée par les données initiales

$$u(t_0, \cdot) = u_0\,, \qquad\qquad \partial_t u(t_0, \cdot) = u_1\,. \tag{1.2}$$

Dans un premier temps on se donne des données initiales $u_0 : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ et $u_1 : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ et l'on cherche u $\mathcal{C}^2$. Le nombre de données est motivé par le fait que l'équation est d'ordre 2 en temps, leur régularité par le fait que l'équation suggère qu'une dérivée en temps vaut une dérivée en espace.

1.1 À partir d'autres modèles

L'équation arrive dans beaucoup de situations différentes. Dans un grand nombre de situations u note une densité volumique de déplacement, c'est-à-dire de différences de position par rapport à une position de référence, et la dérivée seconde provient de l'équation de Newton. Ainsi l'équation est équivalente au fait que pour tout $x_0 < x_1$ et tout t

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)^2 \left(\int_{x_0}^{x_1} u(\cdot, x)\,\mathrm{d}x\right)(t) \;=\; c^2\, \partial_x u(t, x_1) \;-\; c^2\, \partial_x u(t, x_0)\,.$$

Ce bilan traduit que les forces causant le déplacement sont surfaciques et s'opposent de manière linéairement proportionnelle à la déformation causée par le déplacement, quantifiée par $\partial_x u$.
La manière historique d'obtenir l'équation passe à la limite continue sur une chaîne infinie de ressorts. L'équation sur la position du j-ème point est

$$m\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)^2 (u_j)(t) \;=\; -k\,(u_j(t) - u_{j-1}(t)) + k\,(u_{j+1}(t) - u_j(t))$$

où m est une masse, k une raideur, $u_{j+1} - u_j$ est la longueur du ressort après le j-ème point, $u_j - u_{j-1}$ celle du ressort avant le j-ème point. On obtient l'équation des ondes (à vitesse 1) en cherchant u tel que $u_j(t)$ approche $u(t/T_{\mathrm{obs}}(\Delta x), j\Delta x)$ dans la limite $\Delta x \to 0$, où

$$T_{\mathrm{obs}}(\Delta x) \;:=\; \sqrt{\frac{m}{k}}\,\Delta x\,.$$

Cet argument donne une équation pour un objet unidimensionnel, ne pouvant s'étirer/compresser que dans cette direction. De manière similaire, on obtient des équations des ondes pour les mouvements des cordes, des membranes, *etc.*
Montrons comment obtenir l'équation pour les ondes sonores/acoustiques. Partons de

$$\partial_t\rho + \partial_x(\rho\, v) = \, 0\,,$$
$$\partial_t(\rho\, v) + \partial_x(\rho\, v\, v) = -\partial_x(P(\rho))$$

où les inconnues sont la densité de masse ρ et la densité de vitesse v, alors que P donne la pression en fonction de la densité de masse (de manière croissante). Les termes de gauche exprime que v est bien la vitesse des particules, la première équation est la conservation de la masse, la seconde l'équation de Newton avec comme seule force une force surfacique mesurée par la pression. Si $\underline{\rho}$ est une constante strictement positive, alors $(\rho, v) \equiv (\underline{\rho}, 0)$ fournit une solution particulière. En ne conservant que les termes linéaires pour $(r, w) := (\rho, v) - (\underline{\rho}, 0)$, on obtient

$$\partial_t r + \underline{\rho}\, \partial_x w = \, 0\,,$$
$$\underline{\rho}\, \partial_t w = -P'(\underline{\rho})\, \partial_x r$$

ce qui implique que r et w vérifient une équation des ondes à vitesse $\sqrt{P'(\underline{\rho})}$. Si on veut faire apparaître une densité de position, on peut utiliser que le première équation implique qu'il existe u tel que $r/\underline{\rho} = -\partial_x u$ et $w = \partial_t u$. Le même système de départ décrit les vagues de faible profondeur avec la densité de masse remplacée par la hauteur de la surface entre l'air et l'eau. On en déduit que l'équation des ondes décrit aussi des vagues (de manière approchée).
L'équation des ondes multidimensionnelle décrit aussi les ondes lumineuses/électromagnétiques. Il n'est pas vraiment possible d'en donner une version unidimensionnelle. En dimension 3 elle se déduit des équations de Maxwell grâce à $\mathrm{rot}\,\mathrm{rot} \, = \, -\Delta \, + \nabla\,\mathrm{div}$, ce qui s'écrit en Fourier : pour tous vecteurs ξ et a de $\mathbf{R}^3$, $\|\xi\|^2\, a = \langle \xi, a\rangle\, \xi - \xi \wedge (\xi \wedge a)$.

1.2 Structure hamiltonienne

L'analogie avec l'équation de Newton en dimension finie est aussi utile pour identifier une loi de conservation. Une telle conservation arrive pour l'équation de Newton quand les forces sont obtenues à partir du gradient d'une énergie potentielle. L'équation

$$m\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)^2(q)(t) = -\nabla U(q(t))$$

implique

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}\, m\, \left\|\frac{\mathrm{d}\,q}{\mathrm{d}t}\right\|^2 + U(q)\right) \, = \, 0\,.$$

On peut le lire de manière plus structurelle en introduisant le moment $p = m\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}q$ et en posant

$$H(q,p) \, := \, \frac{1}{2m}\|p\|^2 + U(q)\,, \qquad J := \begin{pmatrix} 0_d & I_d \\ -I_d & 0_d \end{pmatrix}$$

de sorte que

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix} \, = \, J\, \nabla_{(q,p)} H(q,p)$$

avec J anti-symétrique. C'est le cas de la chaîne de ressorts avec $q=(x_j)_j$ et $U(q)=\frac{1}{2}\,k\,\sum_j(x_j-x_{j-1})^2$. Pour identifier le même genre de structure pour (1.1), il faut interpréter $-c^2\,\partial_x^2 u$ comme un gradient L^2 en u pour la fonctionnelle $u\mapsto \frac{1}{2}\,c^2\,\int(\partial_x u)^2$. Cela suggère que (1.1) implique la conservation dans le temps de

$$\frac{1}{2}\int_{\mathbf{R}}(\partial_t u(\cdot,x))^2\,\mathrm{d}x + c^2\int_{\mathbf{R}}(\partial_x u(\cdot,x))^2\,\mathrm{d}x\,.$$

On peut le vérifier à la main en constatant que (1.1) implique

$$\partial_t\left(\tfrac{1}{2}(\partial_t u)^2+\tfrac{1}{2}c^2(\partial_x u)^2\right)\;-\;c^2\partial_x(\partial_t u\,\partial_x u)\;=\;0\,.$$

On retrouve une structure plus abstraite de type opérateur anti-symétrique appliqué à un gradient pour $(w_1,w_2)=(c\partial_x u,\partial_t u)$ qui vérifie

$$\partial_t\begin{pmatrix}w_1\\w_2\end{pmatrix}\;=\;\begin{pmatrix}0 & c\partial_x\\ c\partial_x & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}w_1\\w_2\end{pmatrix}$$

qui implique

$$\frac{1}{2}\partial_t(w_1^2+w_2^2)-c\,\partial_x(w_1\,w_2)\;=\;0\,.$$

2 Équation sans bord

Notons en préalable que l'équation est invariante par translation en temps et par inversion du sens du temps. On peut donc se contenter de l'étudier sur $[0,T[$ avec donnée initiale en 0.

2.1 Variables d'onde

Au vu de la factorisation

$$\partial_t^2-c^2\partial_x^2\;=\;(\partial_t+c\,\partial_x)(\partial_t-c\,\partial_x)$$

il est naturel de la résoudre en changeant de variable en remplaçant u par v lié par

$$u(t,x)=v(x+ct,x-ct)\,,\qquad\qquad v(a,b)=u\left(\frac{a-b}{2c},\frac{a+b}{2}\right)$$

de sorte que l'équation se récrit $\partial_{ab}^2 v=0$. Cela se résout en $v(a,b)=F(a)+G(b)$ pour certaines fonctions F et G de classe $\mathcal{C}^2$. En combinant avec (1.1) en $t_0=0$, on déduit

$$F'(a)=\;\frac{1}{2}\partial_x u_0(a)+\frac{1}{2c}\,u_1(a)\,,\qquad\qquad G'(b)=\;\frac{1}{2}\partial_x u_0(b)-\frac{1}{2c}\,u_1(b)\,.$$

En revenant en variables (t,x), on déduit que

$$\begin{aligned}(c\,\partial_x u+\partial_t u)(t,x)=&\;c\,\partial_x u_0(x+ct)+u_1(x+ct)\,,\\(c\,\partial_x u-\partial_t u)(t,x)=&\;c\,\partial_x u_0(x-ct)-u_1(x-ct)\,,\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}\partial_x u(t,x)=&\;\frac{\partial_x u_0(x+ct)+\partial_x u_0(x-ct)}{2}+\frac{u_1(x+ct)-u_1(x-ct)}{2\,c}\,,\\\partial_t u(t,x)=&\;c\,\frac{\partial_x u_0(x+ct)-\partial_x u_0(x-ct)}{2}+\frac{u_1(x+ct)+u_1(x-ct)}{2}\,,\end{aligned}$$

ce qui s'intègre en

$$u(t,x) = \frac{u_0(x+ct)+u_0(x-ct)}{2} + \frac{1}{2\,c}\int_{x-ct}^{x+ct} u_1\,,$$
$$u(t,\cdot) = \frac{u_0(\cdot+ct)+u_0(\cdot-ct)}{2} + \frac{1}{2\,c}\int_{-ct}^{ct} u_1(\cdot+y)\,\mathrm{d}y\,. \tag{2.1}$$

Résumons ce que nous avons montré jusqu'ici.

Théorème 1 *Pour tout* u_0 $\mathcal{C}^2$ *et* u_1 $\mathcal{C}^1$*, le problème de Cauchy* (1.1)-(1.2) *possède une unique solution* $\mathcal{C}^2$ *et cette solution est donnée par* (2.1) *(quand* $t_0 = 0$*).*

Notons que

1. La dynamique est réversible, elle peut être résolue à la fois vers le futur et vers le passé.
2. Si u_0 et u_1 sont en fait $\mathcal{C}^\infty$, alors la solution u est $\mathcal{C}^\infty$.
3. On a propagation à vitesse finie majorée par c.
4. Si pour un certain $X_{\text{pér}}$, u_0 et u_1 sont $X_{\text{pér}}\mathbf{Z}$-périodiques, alors, pour tout t, $u(t,\cdot)$ l'est également.

De (2.1) on déduit différentes estimations : pour tout $1 \leq p \leq \infty$ et tout $t \in \mathbf{R}$

$$\|u(t,\cdot)\|_{L^p(\mathbf{R})} \leq \|u_0\|_{L^p(\mathbf{R})} + |t|\,\|u_1\|_{L^p(\mathbf{R})}\,,$$
$$\|u(t,\cdot)\|_{L^p(\mathbf{R})} \leq \|u_0\|_{L^p(\mathbf{R})} + \frac{(2\,c\,|t|)^{\frac{1}{p}}}{2\,c}\,\|u_1\|_{L^1(\mathbf{R})}\,.$$

Si u_0 converge vers 0 à l'infini et u_1 est nul, alors

$$\lim_{t\to\infty}\|u(t,\cdot)\|_{L^\infty(\mathbf{R})} \;=\; \frac{1}{2}\|u_0\|_{L^\infty(\mathbf{R})}\,.$$

Si u_0 est nul et u_1 est intégrable, alors

$$\lim_{t\to\infty}\|u(t,\cdot)\|_{L^\infty(\mathbf{R})} \;=\; \frac{1}{2\,c}\left|\int_{\mathbf{R}} u_1\right|\,.$$

Remarque 2 *À la fois, la possibilité de factoriser l'équation de manière différentielle et les conséquences tirées sont propres à la dimension* 1*. En particulier, à partir de la dimension* 2 *l'équation des ondes ne ressemble pas aux équations de transport et contient implicitement un mécanisme d'amortissement avec le temps/la distance. Discutons-le brièvement pour les fonctions radiales. Si* $u(t,x) = w(t,\|x\|)$*, avec* $x \in \mathbf{R}^N$*, alors* $\partial_t^2 u - c^2\,\Delta_x u = 0$ *équivaut à*

$$\partial_t^2 v - c^2\frac{1}{r^{N-1}}\,\partial_r(r^{N-1}w) \;=\; 0\,.$$

En dimension 3*, l'équation se récrit* $\partial_t^2(r\,w) - c^2\partial_r^2(r\,w) \;=\; 0$*. Ce facteur* $\|x\|$ *supplémentaire par rapport à la dimension* 1 *se traduit par une décroissance en* $1/|t|$*. Plus généralement, indépendamment de la radialité, en dimension* N *on attend une décroissance en* $|t|^{-\frac{(N-1)}{2}}$*, due à l'étalement dans les* $(N-1)$ *directions non radiales. Rendre cela rigoureux dépasse le cadre de l'agrégation. Les conservations liées à la structure hamiltonienne et la résolution en Fourier sont elles faciles et robustes par rapport à la dimension. Par contraste, à partir de la dimension* 2*, on montre (de manière trop difficile pour l'agrégation) que le seul* p *pour lequel* $(\nabla_x u_0, u_1) \in L^p$ *implique* $(\nabla_x u(t,\cdot), \partial_t u(t,\cdot)) \in L^p$ *est* $p = 2$*.*

Pour avoir une idée de jusqu'où on peut pousser l'existence et l'unicité, identifions une équation duale. Posons $U = (u, \partial_t u)$ se sorte que (1.1) devient

$$\partial_t U \;=\; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ c^2\partial_x^2 & 0 \end{pmatrix} U\,.$$

Si

$$-\partial_t \begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} 0 & c^2\partial_x^2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \end{pmatrix}$$

alors

$$\partial_t(\varphi\, u + \psi\, \partial_t u) \;-\; c^2\, \partial_x(\psi \partial_x u - u \partial_x \psi) \;=\; 0\,.$$

Le système en (φ, ψ) se récrit $\varphi = -\partial_t \psi$ et $\partial_t^2 \psi - c^2 \partial_x^2 \psi = 0$ et la conservation est écrite de manière équivalente

$$\partial_t(-\partial_t \psi\, u + \psi\, \partial_t u) \;-\; c^2\, \partial_x(\psi \partial_x u - u \partial_x \psi) \;=\; 0\,.$$

L'équation duale est donc également l'équation des ondes et l'on peut s'en servir pour étendre l'existence et l'unicité à un cadre distributionnel.

2.2 Analyse de Fourier

Si l'on ajoute des hypothèses de localisation spatiale sur u_0, u_1 et u, l'équation peut être résolue à l'aide de la transformée de Fourier. Cela demande de diagonaliser

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -c^2\xi^2 & 0 \end{pmatrix}$$

dont les valeurs propres sont $i\, c\, \xi$ et $-i\, c\, \xi$. Cela résulte en

$$\mathcal{F}\begin{pmatrix} u \\ \partial_t u \end{pmatrix}(t, \xi) \;=\; \begin{pmatrix} \cos(c\, t\, \xi) & \frac{\sin(c\, t\, \xi)}{c\, \xi} \\ -c\, \xi\, \sin(c\, t\, \xi) & \cos(c\, t\, \xi) \end{pmatrix} \mathcal{F}\begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \end{pmatrix}(\xi)\,.$$

La loi de conservation correspond au fait que

$$\begin{pmatrix} \cos(c\, t\, \xi) & \mathrm{i}\, \sin(c\, t\, \xi) \\ \mathrm{i}\, \sin(c\, t\, \xi) & \cos(c\, t\, \xi) \end{pmatrix}$$

est unitaire.

2.3 Équations inhomogènes

Pour passer de l'équation linéaire (1.1) à une version affine, nous allons utiliser une version du principe de Duhamel, aussi appelé principe de variation de la constante. Pour cela il est commode de noter $S(t)$ l'opérateur solution associé au théorème 1, explicitement posons

$$S(t) \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \end{pmatrix}(x) \;:=\; \begin{pmatrix} u(t, x) \\ \partial_t u(t, x) \end{pmatrix}$$

où u est donné par (2.1).

Théorème 3 *Pour tout u_0 $\mathcal{C}^2$, u_1 $\mathcal{C}^1$ et f $\mathcal{C}^1$, il existe un unique u $\mathcal{C}^2$ vérifiant* (1.2) *et $\partial_t^2 u - c^2 \partial_x^2 u = f$ et cette solution est donnée par, pour tout t,*

$$\begin{pmatrix} u(t,\cdot) \\ \partial_t u(t,\cdot) \end{pmatrix} = S(t-t_0)\begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \end{pmatrix} + \int_{t_0}^{t} S(t-\tau)\begin{pmatrix} 0 \\ f(\tau,\cdot) \end{pmatrix} \mathrm{d}\tau\,,$$

autrement dit

$$\begin{aligned} u(t,\cdot) &= \frac{u_0(\cdot + c(t-t_0)) + u_0(\cdot - c(t-t_0))}{2} + \frac{1}{2\,c}\int_{-c(t-t_0)}^{c(t-t_0)} u_1(\cdot + y)\,\mathrm{d}y \\ &\quad + \frac{1}{2\,c}\int_{t_0}^{t}\left(\int_{-c(t-\tau)}^{c(t-\tau)} f(\tau, \cdot + y)\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}\tau\,. \end{aligned}$$

Le plus simple pour démontrer le théorème affine est sans doute d'utiliser les variables (a, b) utilisées pour démontrer le théorème linéaire.

3 Problèmes à bord

Les théorèmes ci-dessus contiennent déjà le cas périodique. Par ailleurs, les cas où l'on impose sur chaque côté du bord une valeur de u, $\partial_t u$ ou $\partial_x u$ (pas forcément la même) se ramène au cas homogène en soustrayant une fonction avec les bonnes valeurs de bord (ce qui change le terme source et la donnée initiale) et le cas homogène se ramène au cas périodique par prolongement pair/impair et périodisation. On rappelle que pour monter en régularité dans un problème à données initiale et de bord il faut que les données soient compatibles avec l'équation aux coins.

Pour aller au-delà des astuces de réduction ci-dessus, essayons de donner une idée de quelles sont les données au bord possibles. Commençons par noter que si on prescrit une valeur sur u sur un bord spatial, alors on dispose aussi de $\partial_t u$ (mais pas de $\partial_x u$). Puisque l'équation est d'ordre 2 en espace on s'attend à pouvoir prescrire au plus deux données. Notons que sans donnée de bord si on prescrit une donnée initiale $(u, \partial_t u)_{|\{0\}\times[x_\ell, x_r]}$ alors

— $\partial_t u + c\partial_x u$ est déterminé en tout (t, x) tel que $x_\ell \leq x + ct \leq x_r$;

— $\partial_t u - c\partial_x u$ est déterminé en tout (t, x) tel que $x_\ell \leq x - ct \leq x_r$.

Pour compléter les valeurs sur $[0, (x_r - x_\ell)/c] \times [x_\ell, x_r]$, il suffit d'assurer que

— $\partial_t u + c\partial_x u$ est déterminé en tout (t, x_r) à partir de la condition en x_r et la connaissance de $\partial_t u - c\partial_x u$;

— $\partial_t u - c\partial_x u$ est déterminé en tout (t, x_ℓ) à partir de la condition en x_ℓ et la connaissance de $\partial_t u + c\partial_x u$.

En particulier en x_r n'importe quelle prescription de $\alpha_r \partial_t u + \beta_r \partial_x u$ avec (α_r, β_r) non colinéaire à $(1, -c)$ convient alors qu'en x_ℓ convient n'importe quelle prescription de $\alpha_\ell \partial_t u + \beta_\ell \partial_x u$ avec $(\alpha_\ell, \beta_\ell)$ non colinéaire à $(1, c)$.

Références

[Eva10] L. C. Evans. *Partial differential equations*, volume 19 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, second edition, 2010.