Préparation à l'Agrégation
Année 2020–2021

Corrigé du Problème d'Analyse 2007

I Préliminaires

A. Eléments de $\mathcal{P}$

1. (a) La suite $(c_\lambda)_{\lambda\in\mathbb{R}}$ étant presque nulle, il existe $R > |\lambda_0|$ t.q.:

$$\frac{1}{T}\int_0^T p(t)e_{-\lambda_0}(t)dt = \sum_{|\lambda|\leq R} \frac{c_\lambda}{T}\int_0^T e_{\lambda-\lambda_0}(t)dt$$

avec: $\forall \lambda \in \mathbb{R}\setminus\{\lambda_0\}$:

$$\frac{c_\lambda}{T}\int_0^T e_{\lambda-\lambda_0}(t)dt = \frac{1}{\lambda-\lambda_0}(e^{i(\lambda-\lambda_0)T}-1) \Rightarrow \left|\int_0^T e_{\lambda-\lambda_0}(t)dt\right| \leq \frac{2}{|\lambda-\lambda_0|}$$

On en déduit qu'il existe $M > 0$ t.q.

$$\left|\sum_{\lambda\neq\lambda_0} \frac{c_\lambda}{T}\int_0^T e_{\lambda-\lambda_0}(t)dt\right| \leq \sum_{|\lambda|\leq R} \frac{2}{|\lambda-\lambda_0|}\frac{|c_\lambda|}{T} \leq \frac{M}{T}N(p) \underset{T\to+\infty}{\to} 0$$

D'autre part:

$$\frac{c_{\lambda_0}}{T}\int_0^T dt = c_{\lambda_0} \Rightarrow \left|\frac{1}{T}\int_0^T p(t)e_{-\lambda_0}(t)dt - c_{\lambda_0}\right| \leq$$

$$\leq \left|\sum_{\lambda\neq\lambda_0} \frac{c_\lambda}{T}\int_0^T e_{\lambda-\lambda_0}(t)dt\right| \underset{T\to+\infty}{\to} 0$$

i.e.:

$$\lim_{T\to+\infty}\frac{1}{T}\int_0^T p(t)e_{-\lambda_0}(t)dt = c_{\lambda_0}$$

(b) Soit $(c_\lambda)_{\lambda\in\mathbb{R}}$ une famille presque nulle de $\mathbb{C}$ t.q., .avec les notations de (a): $p = 0$. De ce qui précède, on déduit que: $\forall \lambda_0 \in \mathbb{R}$,

$$c_{\lambda_0} = \lim_{T\to+\infty}\frac{1}{T}\int_0^T p(t)e_{-\lambda_0}(t)dt = 0.$$

2. (a) Soit $p = \sum_{\lambda\in\Lambda} c_\lambda e_\lambda \in \mathcal{P}_\Lambda$. Par définition:

$$\mathrm{Re}(p) = \frac{1}{2}\sum_{\lambda\in\Lambda}(c_\lambda e_\lambda + \bar{c}_\lambda \bar{e}_\lambda)$$

avec $\bar{e}_\lambda = e_{-\lambda}$, $\forall\lambda \in \Lambda$ et $\lambda \in \Lambda \iff -\lambda \in \Lambda$ par hypothèse, donc

$$\mathrm{Re}(p) = \frac{1}{2}\sum_{\lambda\in\Lambda}(c_\lambda e_\lambda + \bar{c}_\lambda e_{-\lambda}) \in \mathcal{P}_\Lambda.$$

De même:

$$\mathrm{Im}(p) = \frac{1}{2i}\sum_{\lambda\in\Lambda}(c_\lambda e_\lambda - \bar{c}_\lambda \bar{e}_\lambda) = \frac{1}{2i}\sum_{\lambda\in\Lambda}(c_\lambda e_\lambda - \bar{c}_\lambda e_{-\lambda}) \in \mathcal{P}_\Lambda.$$

Par définition, $\mathrm{Re}(p)$ et $\mathrm{Im}(p)$ prennent leurs valeurs dans $\mathbb{R}$. On a immédiatement:

$$|\mathrm{Re}(p)| \leq N(p) < +\infty \quad \text{et} \quad |\mathrm{Im}(p)| \leq N(p) < +\infty$$

donc $\mathrm{Re}(p) \in \mathcal{P}_\Lambda^{\mathbb{R}}$ et $\mathrm{Im}(p) \in \mathcal{P}_\Lambda^{\mathbb{R}}$

(b) Soit $p \in \mathcal{P}_\Lambda^{\mathbb{R}}$. Par hypothèse:

$$N(p) \leq N(\mathrm{Re} p) + N(\mathrm{Im} p) \leq K'(\Lambda)\sup \mathrm{Re}(p) + K'(\Lambda)\sup \mathrm{Im}(p) \leq$$

$$\leq K'(\Lambda)\sup|\mathrm{Re}(p)| + K'(\Lambda)\sup|\mathrm{Im}(p)| \leq 2K'(\Lambda)\|p\|_\infty$$

donc Λ est un ensemble de Sidon.

B. Polynômes de Legendre

1. (a) L'application $F : z \mapsto \dfrac{U_n(z)}{(z-x)^{n+1}}$ est méromorphe sur $\mathbb{C}$ et admet $z = x$ pour unique pôle. D'après le Théorème des Résidus:

$$\int_\gamma \frac{(z^2-1)^n}{(z-x)^{n+1}}dz = 2i\pi \mathrm{Res}\left(z \mapsto \frac{U_n(z)}{(z-x)^{n+1}}\right)\Bigg|_{z=x}$$

Le Développement de Taylor du polynôme U_n en $z = x$ donne: $\forall z \in \mathbb{C}\setminus\{x\}$,

$$\frac{U_n(z)}{(z-x)^{n+1}} = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{U_n^{(k)}(x)}{k!(z-x)^{n+1-k}} + \frac{U_n^{(n)}(x)}{n!(z-x)} + \sum_{k=n+1}^{2n}(z-x)^{k-n-1}\frac{U_n^{(k)}(x)}{k!}$$

d'où on déduit immédiatement que

$$\text{Res}\left(z \mapsto \frac{U_n(z)}{(z-x)^{n+1}}\right)\Bigg|_{z=x} = \frac{U_n^{(n)}(x)}{n!} =: \frac{P_n(x)}{n!}.$$

Il en résulte:

$$\int_\gamma \frac{(z^2-1)^n}{(z-x)^{n+1}}dz = \frac{2i\pi}{n!}P_n(x).$$

(b) La formule de (a) est vraie pour tout lacet γ de rayon $r > 0$. En particulier, le choix $r = \sqrt{1-x^2}$ donne

$$\frac{P_n(x)}{n!} = \frac{1}{2\pi r^n}\int_{-\pi}^{\pi}((x+re^{i\theta})^2-1)^n e^{-in\theta}d\theta$$

$$\underset{r=\sqrt{1-x^2}}{=} \frac{1}{2\pi(1-x^2)^{n/2}}\int_{-\pi}^{\pi}\left((x+\sqrt{1-x^2}e^{i\theta})^2-1\right)^n e^{-in\theta}d\theta$$

$$= \frac{1}{2\pi(1-x^2)^{n/2}}\int_{-\pi}^{\pi}\left((1-x^2)(e^{2i\theta}-1)+2x\sqrt{1-x^2}e^{i\theta}\right)^n e^{-in\theta}d\theta$$

$$= \frac{(1-x^2)^{n/2}}{2\pi(1-x^2)^{n/2}}e^{in\theta}\int_{-\pi}^{\pi}\left(2i\sqrt{1-x^2}\sin\theta+2x\right)^n e^{-in\theta}d\theta$$

$$= \frac{2^n}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(x+i\sqrt{1-x^2}\sin\theta\right)^n d\theta$$

$$\Rightarrow L_n(x) = \frac{P_n(x)}{2^n n!} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(x+i\sqrt{1-x^2}\sin\theta\right)^n d\theta \qquad (1)$$

Quand $|x| = 1$, soit par exemple $x = 1$, pour γ de rayon $r > 1$:

$$\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{(z^2-1)^n}{(z-1)^{n+1}}dz = \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{(z+1)^n}{(z-1)}dz =$$

$$= Res\left(z \mapsto \frac{(z+1)^n}{(z-1)}\right)|_{z=1} = \lim_{z\to 1}(z+1)^n = 2^n \Rightarrow \frac{P_n(1)}{n!} = 2^n$$

donc $L_n(1) = 1$.

De même:

$$\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{(z^2-1)^n}{(z+1)^{n+1}}dz = \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{(z-1)^n}{(z+1)}dz =$$

$$= Res\left(z \mapsto \frac{(z-1)^n}{(z+1)}\right)|_{z=-1} = \lim_{z\to -1}(z-1)^n = (-2)^n \Rightarrow \frac{P_n(-1)}{n!} = (-2)^n$$

donc $L_n(-1) = (-1)^n$. Par continuité du membre de droite dans (1), on en déduit que (1) est vrai sur $[-1,1]$.

2. De 1.(b), on déduit immédiatement que

$$L_n(1) = 1, \quad L_n(-1) = (-1)^n.$$

Soit $x \in [-1,1]$. De 1.(b), on déduit que

$$|L_n(x)| \leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |x+i\sqrt{1-x^2}\sin\theta|^n d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(x^2+(1-x^2)(\sin\theta)^2)^{n/2}d\theta$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(x^2(\cos\theta)^2+(\sin\theta)^2)^{n/2}d\theta \leq 1$$

et les égalités: $|L_n(1)| = |L_n(-1)| = 1$ montrent que cette borne est atteinte, i.e.:

$$\sup_{x\in[-1,1]} |L_n(x)| = 1.$$

3. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$ et soit $x \in_\eta$. D'après les calculs faits à la question 2.,

$$|L_n(x)| \leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(x^2(\cos\theta)^2+(\sin\theta)^2)^{n/2}d\theta.$$

On remarque que

$$x \in I_\eta \iff |x| \leq 1-\eta \iff 0 \leq x^2 \leq (1-\eta)^2$$

donc

$$|L_n(x)| \leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}((1-\eta)^2(\cos\theta)^2+(\sin\theta)^2)^{n/2}d\theta =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(1+(\eta^2-2\eta)(\cos\theta)^2)^{n/2}d\theta$$

avec $\eta^2-2\eta = \eta(\eta-1)-\eta \leq -\eta \Rightarrow$

$$|L_n(x)| \leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(1-\eta(\cos\theta)^2)^{n/2}d\theta$$

(b) On commence par remarquer que $\theta \mapsto 1-\eta(\cos\theta)^2$étant paire, on a

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(1-\eta(\cos\theta)^2)^{n/2}d\theta = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}(1-\eta(\cos\theta)^2)^{n/2}d\theta$$

Soit $\delta \in]0, \frac{\pi}{2}[$. On a

$$\forall\theta \in [0,\pi], \quad \left|\theta - \frac{\pi}{2}\right| \geq \delta \Rightarrow |\cos\theta|^2 \geq |\cos\left(\frac{\pi}{2}\pm\delta\right)^2 = |\sin\delta|^2$$

$$\Rightarrow \forall\theta \in [0,\pi], \quad \left|\theta - \frac{\pi}{2}\right| \geq \delta \Rightarrow 0 < \eta|\sin\delta|^2 \leq \eta(\cos\theta)^2 \leq 1.$$

Il en résulte:

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}-\delta}(1-\eta(\cos\theta)^2)^{n/2}d\theta \leq \frac{\pi}{2}(1-\eta|\sin\delta|^2)^{n/2}$$

et

$$\int_{\frac{\pi}{2}+\delta}^{\pi}(1-\eta(\cos\theta)^2)^{n/2}d\theta \leq \frac{\pi}{2}(1-\eta|\sin\delta|^2)^{n/2}.$$

De plus:

$$\int_{\frac{\pi}{2}-\delta}^{\frac{\pi}{2}+\delta}(1-\eta(\cos\theta)^2)^{n/2}d\theta \leq 2\delta.$$

Donc:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(1-\eta(\cos\theta)^2)^{n/2}d\theta \leq \pi\frac{1}{2}(1-\eta|\sin\delta|^2)^{n/2} + \frac{\delta}{\pi}$$

avec $0 < 1-\eta|\sin\delta|^2 < 1 \Rightarrow$

$$\lim_{n\to+\infty}(1-\eta|\sin\delta|^2)^{n/2} = 0$$

donc

$$\limsup_{n\to+\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(1-\eta(\cos\theta)^2)^{n/2}d\theta \leq \frac{\delta}{\pi}, \quad \forall\delta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[.$$

i.e.:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(1-\eta(\cos\theta)^2)^{n/2}d\theta = 0.$$

De (a), on déduit que

$$\sup_{x\in I_\eta}|L_n(x)| \leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(1-\eta(\cos\theta)^2)^{n/2}d\theta \Rightarrow \lim_{n\to+\infty}\sup_{x\in I_\eta}|L_n(x)| = 0$$

i.e. que la suite $(L_n)_{n\geq 0}$ converge uniformément vers 0 sur I_η.

C. Opérateurs Différentiels

1. (a) On a

$$(X^2-1)U_n' = (X^2-1)((X^2-1)^n)' = (X^2-1)(n(X^2-1)^{n-1}(2X)) =$$

$$= 2nX(X^2-1) = 2nXU_n.$$

(b) De (a), on déduit que

$$\left((X^2-1)U_n'\right)^{(n+1)} = (2nXU_n)^{(n+1)} \iff$$

$$\iff \sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^k (X^2-1)^{(k)} U_n^{(n+2-k)} = 2n \sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^k X^{(k)} U_n^{(n+1-k)}$$

$$\iff (X^2-1)U_n^{(n+2)} + 2(n+1)XU_n^{(n+1)} + n(n+1)U_n^{(n)} =$$

$$= 2nXU_n^{(n+1)} + 2n(n+1)U_n^{(n)}$$

$$\iff (X^2-1)U_n^{(n+2)} + 2XU_n^{(n+1)} - n(n+1)U_n^{(n)} = 0$$

$$\iff (X^2-1)P_n''+2XP_n'-n(n+1)P_n = 0 \iff D(L_n) = -n(n+1)L_n$$

2. Soit $f, g \in V$. On a

$$\int_{-1}^{1}(1-t^2)f''(t)g(t)\,dt = -\int_{-1}^{1}(1-t^2)f'(t)g'(t)\,dt + 2\int_{-1}^{1} tf'(t)g(t)\,dt + (1-t^2)f'(t)g(t)\Big|_{-1}^{1} =$$

$$= -\int_{-1}^{1}(1-t^2)f'(t)g'(t)\,dt + 2\int_{-1}^{1} tf'(t)g(t)\,dt$$

donc

$$\int_{-1}^{1} D(f)(t)g(t)\,dt = \int_{-1}^{1}(1-t^2)f''(t)g(t)\,dt - 2\int_{-1}^{1} tf'(t)g(t)\,dt = -\int_{-1}^{1}(1-t^2)f'(t)g'(t)\,dt$$

L'expression du membre de droite étant symétrique en f et g on en déduit que

$$\int_{-1}^{1} D(f)(t)g(t)\,dt = \int_{-1}^{1} f(t)D(g)(t)\,dt$$

3. De 1.(b), on déduit que $\{-n(n+1),\ n \in \mathbb{N}\} \subset \Sigma$.

   Soit $\lambda \in \Sigma$ et soit $f \in V_\lambda \setminus \{0\}$. D'après 2.: $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\int_{-1}^{1} D(f)(t) L_n(t)\, dt \underset{2.}{=} \int_{-1}^{1} f(t) D(L_n)(t)\, dt$$

$$\iff \lambda \int_{-1}^{1} f(t) L_n(t) dt = -n(n+1) \int_{-1}^{1} f(t) L_n(t) dt$$

$$\iff (\lambda + n(n+1)) \int_{-1}^{1} f(t) L_n(t) dt = 0.$$

   Soit $u = \mathrm{Re}(f)$, $v = \mathrm{Im}(f)$. Il en résulte que

$$\int_{-1}^{1} u(t) L_n(t) dt + i \int_{-1}^{1} v(t) L_n(t) dt = 0$$

   avec

$$\int_{-1}^{1} u(t) L_n(t) dt \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad \int_{-1}^{1} v(t) L_n(t) dt \in \mathbb{R} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_{-1}^{1} u(t) L_n(t) dt = \int_{-1}^{1} v(t) L_n(t) dt = 0.$$

   Si $\lambda \notin \{-n(n+1),\ n \in \mathbb{N}\}$, alors:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \int_{-1}^{1} u(t) L_n(t) dt = \int_{-1}^{1} v(t) L_n(t) dt = 0.$$

   On remarque que: L_n est un polynôme de de degré n, $\forall n \in \mathbb{N}$, ce qui fait de $(L_n)_{n \geq 0}$ une base de $\mathbb{R}[X]$. Comme l'ensemble des fonctions polynômes est dense dans $\mathcal{C}^0([-1,1])$ d'après le Théorème de Stone-Weierstrass, il en résulte que $u = v = 0$, i.e. $f = 0$, ce qui contredit l'hypothèse $f \in V_\lambda \setminus \{0\}$, donc il existe $n \in \mathbb{N}$ t.q. $\lambda = -n(n+1)$.

4. De 2., on déduit que $\mathbb{C}\, L_n \subset V_{-n(n+1)}$. Soit y une solution de (E) et soit W le Wronskien de la paire (L_n, y) de solutions de (E). Par définition:

$$W = \begin{vmatrix} y & L_n \\ y' & L_n' \end{vmatrix}.$$

On a: $\forall x \in [-1,1]$,

$$(1-x^2)W'(x) = y(x)L_n''(x) - y''(x)L_n(x) = 2x\left(y(x)L_n'(x) - y'(x)L_n(x)\right)$$

$$= 2xW(x) \Rightarrow W'(x) = \frac{2x}{(1-x^2)}W(x), \quad \forall x \in]-1,1[.$$

On en déduit qu'il existe une constante $C \in \mathbb{R}$ t.q.

$$\forall x \in]-1,1[, \quad W(x) = \frac{C}{(1-x^2)}.$$

Par définition de V, $W \in \mathcal{C}^1([-1,1],\mathbb{C}) \subset \mathcal{C}^0([-1,1],\mathbb{C})$. Ceci est possible ssi $C = 0$, i.e. ssi $y \in \mathbb{C}L_n$.

5. On cherche si $\mathcal{E}$ admet des solutions de la forme: $u(t,x) = a(t)b(x)$ avec $a, b \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R} \times [-1,1],\mathbb{C})$. Le calcul donne:

$$a''b = ((1-x^2)b'' - 2xb')a.$$

Soit $(t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times [-1,1]$ t.q. $u(t_0,x_0) \neq 0$ et soit $Q =]t_1,t_2[\times]x_1,x_2[\subset \mathbb{R} \times [-1,1]$ t.q. $(t_0,x_0) \in Q$ et

$$\forall (t,x) \in Q, \quad u(t,x) \neq 0.$$

Un tel pavé Q existe par continuité de u. Alors;

$$\forall (t,x) \in Q, \quad \frac{a''(t)}{a(t)} = (1-x^2)\frac{b''(x)}{b(x)} - 2x\frac{b'(x)}{b(x)}.$$

Dans Q la fonction $t \mapsto \frac{a''(t)}{a(t)}$ est une fonction continue à la fois de la variable t et de la variable indépendante x, donc constante: il existe une constante $\sigma \in \mathbb{C}$ t.q.

$$\forall (t,x) \in Q, \quad \frac{a''(t)}{a(t)} = (1-x^2)\frac{b''(x)}{b(x)} - 2x\frac{b'(x)}{b(x)} = \sigma.$$

On en déduit en particulier:

$$\forall (t,x) \in \mathbb{R} \times [-1,1], \quad (1-x^2)b''(x) - 2xb'(x) = \sigma b(x) \underset{3.}{\Rightarrow} \sigma \in \Sigma.$$

Si $\sigma = 0$, alors $a'' = 0 \Rightarrow a(t) = \lambda t + \mu$, avec $(\lambda,\mu) \in \mathbb{C}^2$ et $b \in \mathbb{C}L_0$, i.e. b est constante, donc, u est de la forme: $u(t,x) = \lambda t + \mu$ avec

$(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$, $\forall (t,x) \in \mathbb{R} \times [-1,1]$. Si $K \neq 0$, soit $\sigma = -n(n+1)$, $n \in \mathbb{N}^*$, alors $b \in \mathbb{C}L_n$ et $a''(t) = -n(n+1)a \Rightarrow \exists \alpha, \beta \in \mathbb{C}$ t.q.

$$\forall (t,x) \in \mathbb{R} \times [-1,1], \quad at) = \left(\alpha e^{i\sqrt{n(n+1)}t} + \beta e^{-i\sqrt{n(n+1)}t}\right),$$

donc u est de la forme

$$(t,x) \mapsto L_n(x)\left(\alpha e^{i\sqrt{n(n+1)}t} + \beta e^{-i\sqrt{n(n+1)}t}\right),\ n \in \mathbb{N}^*,\ (\alpha,\beta) \in \mathbb{C}^2,$$

II. Construction d'ensembles de Sidon

A. Théorème d'approximation de Kronecker et application

1. (a) Soit $\sum_{j=1}^n \lambda_j \omega_j = 0$ avec $\lambda_j \in \mathbb{Q}$. En multipliant les deux membres de l'égalité par le dénominateur commun des λ_j, on se ramène au cas où $\lambda_j \in \mathbb{Z}$, $\forall j \in [[1,n]]$. On pose $\tilde{\ell}(x) = \sum_{j=1}^n \lambda_j x_j$, $\forall x = (x_j)_{1 \leq j \leq n} \in \mathbb{R}^n$. Par construction, $\tilde{\ell}(\omega) = 0$. On en déduit:

$$\tilde{\ell}(G_\omega) = \mathbb{R}\ell(\omega) + 2\pi\ell(\mathbb{Z}^n) \Rightarrow \frac{1}{2\pi}\tilde{\ell}(G_\omega)$$

   avec $\lambda_j \in \mathbb{Z}$, $\forall j \in [[1,n]] \Rightarrow \tilde{\ell}(\mathbb{Z}^n) \subset \mathbb{Z}$. On pose $\ell = \frac{1}{2\pi}\tilde{\ell}$.

   (b) Par continuité de ℓ:

$$\ell(\overline{G}_\omega) \subset \overline{\ell(G_\omega)} = \overline{\mathbb{Z}} = \mathbb{Z}$$

   car $\mathbb{Z}$ est fermé dans $\mathbb{R}$. De plus: $\ell \not\equiv 0 \Rightarrow \ell(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}$, donc $\overline{G}_\omega \neq \mathbb{R}^n$.

2. (a) Pour tout $T > 0$, J_T est multilinéaire, donc il suffit de raisonner sur la base $(e_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ de $\mathcal{P}_\mathbb{Z}$. Soit $k = (k_1, \cdots, k_n) \in \mathbb{Z}^n$. On a

$$J_T(e_{k_1}, \cdots, e_{k_n}) = \frac{1}{T}\int_0^T e^{i\omega \cdot kt} dt$$

   avec $\omega \cdot k \neq 0$ si $\neq 0$ car ω est $\mathbb{Q}$-libre. Le calcul direct donne: $\forall k \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}$,

$$J_T(e_{k_1}, \cdots, e_{k_n}) = \frac{1}{T}\frac{e^{i\omega \cdot kT} - 1}{i\omega \cdot k}$$

donc

$$|J_T(e_{k_1},\cdots,e_{k_n})| \leq \frac{1}{T}\frac{2}{|\omega\cdot k|} \underset{T\to+\infty}{\to} 0.$$

De plus: $\forall k\in\mathbb{Z}^n\setminus\{0\}$, $\exists j_0\in[[1,n]]$ t.q. $k_{j_0}\neq 0$ et alors

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e_{k_{j_0}}(t)dt = 0 \Rightarrow \Pi_{j=1}^n\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e_{k_j}(t)dt\right) = 0.$$

Si $k=0$, alors $J_T(e_{k_1},\cdots,e_{k_n}) = 1$, $\forall T>0$, et

$$\forall j\in[[1,n]],\quad k_j = 0 \Rightarrow \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e_{k_j}(t)dt = 1.$$

Finalement dans tous les cas:

$$\lim_{T\to\infty} J_T(e_{k_1},\cdots,e_{k_n}) = \Pi_{j=1}^n\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e_{k_j}(t)dt\right) =: J_\infty(e_{k_1},\cdots,e_{k_n}).$$

(b) Soit $f=(f_1,\cdots,f_n)\in\mathcal{C}^n$. Par densité des polynômes trigonométriques dans $\mathcal{C}$, il exste une suite $(f_k)_{k\geq 0}\in(\mathcal{P}_{\mathbb{Z}}^n)^{\mathbb{N}}$ t.q.

$$\lim_{n\to+\infty}\sup_{0\leq t\leq 2\pi]}\|f(t)-f_k(t)\|_n = 0$$

où $\|\cdot\|_n$ est la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^n$. Pour tout $T>0$, J_T est multlinéaire donc continue sur $\mathcal{C}^n$. On en déduit: $\forall k\geq 0$,

$$|J_T(f)-J_\infty(f)| \leq |J_T(f)-J_T(f_k)|+|J_T(f_k)-J_\infty(f_k)|+|J_\infty(f_k)-J_\infty(f)|.$$

Soit $\varepsilon>0$ et soit k_0 t.q. $\sup_{0\leq t\leq 2\pi]}\|f(t)-f_k(t)\|_n<\varepsilon$, $\forall k\geq k_0$.
On fixe $k\geq k_0$; Alors: $\forall T>0$,

$$|J_T(f)-J_T(f_k)| \leq C\sup_{t\in[0,2\pi]}\|f(t)-f_k(t)\|_n \leq C\varepsilon,$$

et

$$|J_\infty(f)-J_\infty(f_k)| \leq C\sup_{t\in[0,2\pi]}\|f(t)-f_k(t)\|_n \leq C\varepsilon,$$

On en déduit:

$$\limsup_{T\to+\infty}|J_T(f)-J_\infty(f)| \leq 2\varepsilon + \lim_{T\to+\infty}|J_T(f_k)-J_\infty(f_k)| \leq 2\varepsilon..$$

Ceci étant vrai $\forall\varepsilon>0$, on en déduit que

$$\limsup_{T\to+\infty}|J_T(f)-J_\infty(f)| = 0.$$

3. Les g_j étant continues sur le compact $[0, 2\pi]$, elles sont uniformément continues, ainsi que les applicatins $t \mapsto g_j(\omega_j t)$, $j \in [[1, n]]$. Soit $\varepsilon > 0$. Pour tout $j \in [[1, n]$, il existe $\eta_j > 0$ t.q.: $\forall t, t' \in [0, 2\pi]$,

$$|t - t'| < \eta_j \Rightarrow |g_j(\omega_j t) - g_j(\omega_j t')| \leq \varepsilon.$$

Soit $\eta = \min_{1 \leq j \leq n} \eta_j$. Alors: $\forall t, t' \in [0, 2\pi]$,

$$|t - t'| < \eta \Rightarrow |g_j(\omega_j t) - g_j(\omega_j t')| \leq \varepsilon, quad \forall j \in [[1, n]].$$

Du Théorème de Heine, on déduit également que pour tout $j \in [[1, n]$, il existe $t_j \in [0, 1\pi]$ t.q. $g_j(\omega_j t_j) = \sup g_j$. Soit $t = (t_1, \cdots, t_n) \in \mathbb{R}^n$. De 1.(b), on dd́uit qu'il existe $s\omega + 2\pi v \in G_\omega$ t.q. $\|t - s\omega - 2\pi v\| < \eta$, et alors, par périodicité: $\forall j \in [[1, n]]$,

$$|t_j - s\omega_j - 2\pi v_j| \leq \|t - s\omega - 2\pi v\| < \eta \Rightarrow$$

$$|g_j(\omega_j t) - g_j(\omega_j s)| = |g_j(\omega_j t) - g_j(\omega_j s + 2\pi v_j)| < \varepsilon.$$

On en déduit:

$$|g(s) - \sum_{j=1}^{n} g_j(\omega_j t_j)| \leq \sum_{j=1}^{n} |g_j(\omega_j s) - g_j(\omega_j t_j)| \leq n\varepsilon,$$

i.e., par le choix des t_j, $j \in [[1, n]]$,

$$|g(s) - \sum_{j=1}^{n} \sup g_j| \leq n\varepsilon.$$

Il en résulte:

$$\sup g \geq g(s) \geq \sum_{j=1}^{n} \sup g_j - n\varepsilon.$$

Ceci étant vrai $\forall \varepsilon > 0$, on en déduit que $\sup g \geq \sum_{j=1}^{n} \sup g_j$.

On a aussi immédiatement: $\sup g \leq \sum_{j=1}^{n} \sup g_j$ donc $\sup g = \sum_{j=1}^{n} \sup g_j$.

4. Soit $p \in \mathcal{P}_\Lambda^\mathbb{R}$, $p = \sum_{\lambda \in \Lambda} p_\lambda$. De l'hypothèse $\Lambda = \cup_{\gamma \in \Gamma} \gamma \Lambda_\gamma$, on déduit que pour tout $\gamma \in \Gamma$, p_{Λ_γ} se réécrit sous la forme:

$$p_{\Lambda_\gamma}(t) = \tilde{p}_{\Lambda_\gamma}(\gamma t), \quad \tilde{p}_{\Lambda_\gamma} \in \mathcal{P}_{\gamma \Lambda_\gamma}, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

De 3. on déduit, la famille Γ étant $\mathbb{Q}$-libre, que:

$$\sup p = \sum_{\gamma\in\Gamma} \sup p_{\Lambda_\gamma}.$$

On a

$$N(p) \leq \sum_{\gamma\in\Gamma} N(p_{\Lambda_\gamma}) \underset{p_{\Lambda_\gamma}\in\mathcal{P}^{\mathbb{R}}_{\Lambda_\gamma}}{\leq} \sum_{\gamma\in\Gamma} K'(\Lambda_\gamma)\sup p_{\Lambda_\gamma} \leq c\sum_{\gamma\in\Gamma} \sup p_{\Lambda_\gamma} = c\sup p.$$

Soit $\lambda \in \Lambda$ et soit $\gamma \in \Gamma$ t.q. $\lambda \in \gamma\Lambda_\gamma$. Comme Λ_γ est symétrique par hypothèse, $-\lambda \in \gamma\Lambda_\gamma \subset \Lambda$, ie. Λ est symétrique. Finalement, Λ est un ensemble de Sidon réel de constante $K'(\Lambda) \leq c$.

B.

1. (a) Par définition:

$$\hat{R}^{\varphi}_k(0) = frac12\pi \int_0^{2\pi} R^{\varphi}_k(t)dt.$$

Dans le dévelopement de $R^{\varphi}_k(t)$ suivant la famille $e^{\pm(i\lambda_j\pm\varphi_j)}$, $j \in [[1,k]]$, l'unique terme de contribution non nulle est 1, donc $\hat{R}^{\varphi}_k(0) = 1$.
Soit $m \in [[1,k]]$. Par définition:

$$\hat{R}^{\varphi}_k(\lambda_m) = frac12\pi \int_0^{2\pi} R^{\varphi}_k(t)e^{-i\lambda_m t}dt.$$

On remarque que la famille Λ étant dissociée, $\lambda_m = \sum_{j\geq 1}\varepsilon_j\lambda_j$ avec $\varepsilon_j = \delta_{j,m}$ est l'unique décomposition admissible de λ_m. Dans le dévelopement de $R^{\varphi}_k(t)$, l'unique terme de contribution non nulle est donc $\frac{1}{2}e^{i(\lambda_m t+\varphi_m)}$. On en déduit que

$$\hat{R}^{\varphi}_k(\lambda_m) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1}{2}e^{i(\lambda_m t+\varphi_m)}e^{-i\lambda_m t}dt = \frac{1}{2}e^{i\varphi_m}.$$

Le même raisonnement pour $-\lambda_m$ donne:

$$\hat{R}^{\varphi}_k(-\lambda_m) = \frac{1}{2}e^{-i\varphi_m}.$$

(b) Soit $p \in \mathcal{P}_\Lambda^\mathbb{R}$. On a:

$$p = \sum_{m=1}^{n} (c_{\lambda_m} e_{\lambda_m} + c_{-\lambda_m} e_{-\lambda_m})$$

avec $\overline{c_{\lambda_m} e_{\lambda_m}} = \overline{c}_{\lambda_m} e_{-\lambda_m} \Rightarrow \overline{c}_{\lambda_m} = c_{-\lambda_m}$ par unicité de la décomposition de p dans la base $(e_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$.

Par définition: $\forall m \geq 1$,

$$\hat{p}(\lambda_m) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} p(t)e_{-\lambda_m}(t)dt = \sum_{j=1}^{n} c_{\lambda_j}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e_{\lambda_j-\lambda_m}(t)dt +$$

$$+\sum_{j=1}^{n} c_{-\lambda_j}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e_{-\lambda_j-\lambda_m}(t)dt = c_{\lambda_m}$$

donc

$$p = \sum_{m\geq 1} (\hat{p}(\lambda_m)e_{\lambda_m} + \hat{p}(-\lambda_m)e_{-\lambda_m}$$

avec: $\forall m \geq 1$, $\hat{p}(-\lambda_m) = \overline{\hat{p}(\lambda_m)}$. On en déduit:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} p(t)R_k^\varphi(t)dt = \sum_{m\geq 1}(\hat{p}(\lambda_m)\hat{R}_k^\varphi(-\lambda_m) + \hat{p}(-\lambda_m)\hat{R}_k^\varphi(\lambda_m))$$

$$\underset{(a)}{=} \frac{1}{2}\sum_{m\geq 1}(\hat{p}(\lambda_m)e^{-i\varphi_m} + \hat{p}(-\lambda_m)e^{i\varphi_m})$$

Pour tout $m \geq 1$, on pose: $\hat{p}(\lambda_m) = |\hat{p}(\lambda_m)|ei\theta_m$ et alors

$$\hat{p}(-\lambda_m) = \overline{\hat{p}(\lambda_m)} \Rightarrow p(-\lambda_m) = |\hat{p}(\lambda_m)|e^{-i\theta_m}.$$

On choisit: $\varphi_m = \theta_m$, $\forall m \geq 1$, et alors

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} p(t)R_k^\varphi(t)dt = \sum_{m\geq 1}|\hat{p}(\lambda_m)|.$$

(c) Soit $p \in \mathcal{P}_\Lambda^\mathbb{R}$. De (b), on déduit que:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} p(t)R_k^\varphi(t)dt = \sum_{m\geq 1}|\hat{p}(\lambda_m)| = \frac{1}{2}N(p) \leq \sup p\hat{R}_k^\varphi(0)$$

car $R_k^\varphi \geq 0$, i.e., compt tenu de (a):

$$\frac{1}{2}N(p) \leq \sup p.$$

Comme de plus Λ est symétriqe, on en déduit que Λ est un sensemble de Sidon réel de constante $K'(\Lambda) \leq 2$.

2. Soit $n \in \mathbb{Z}$. On suppose que n se décompose sous la forme d'une somme presque nulle $n = \sum_{j\geq 1} \varepsilon_j \lambda_j$ avec $\varepsilon_\lambda \in \{-1, 0, 1\}$, $\forall j \geq 1$. Si n admet deux telles décompositions, soit:

$$n = n = \sum_{j\geq 1} \varepsilon_j \lambda_j = n = \sum_{j\geq 1} \varepsilon'_j \lambda_j$$

alors

$$0 = \sum_{j\geq 1} (\varepsilon_j - \varepsilon'_j)\lambda_j.$$

Donc, la somme étant presque nulle, il existe $N > 0$ t.q. $\sum_{j=1}^{N} (\varepsilon_j - \varepsilon'_j)\lambda_j = 0$. Alors

$$\varepsilon_N - \varepsilon'_N = -\sum_{j=1}^{N-1} \frac{\lambda_j}{\lambda_N}(\varepsilon_j - \varepsilon'_j)$$

$$\Rightarrow |\varepsilon_N - \varepsilon'_N| \leq 2\sum_{j=1}^{N-1} 3^{j-N} = \frac{2}{3^{N-1}} \frac{3^{N-1}-1}{2} < 1$$

donc $|\varepsilon_N - \varepsilon'_N| < 1 \Rightarrow \varepsilon_N = \varepsilon'_N$. Par récurrence descendante sur N, on en déduit que $\varepsilon_j = \varepsilon'_j$, $\forall j \geq 1$, i.e. que la famille Λ est dissociée.

III. Un ensemble de Sidon d'irrationnels quadratiques

A.

1. (a) On suppose que 0 est isolé dans $G \cap \mathbb{R}^+$. Donc il existe $r > 0$ t.q. $G \cap [0, r[= \{0\}$. Soit $c = \inf(G \cap [0, +\infty[)$. Si $c \notin G$, alors il existe une suite $(x_n)_{n\geq 0} \in G^{\mathbb{N}}$ t.q. $x_n \to c$. Soit $\varepsilon \in]0, c[$. Il

existe $n_0 > 0$ t.q. $x_n \in]c, c+\varepsilon[$, $\forall n \geq n_0$. Alors, $\forall n \geq n_0$, $x_n - c \in]0, \varepsilon[\cap G \subset]0, c[\cap G$, ce qui contredit le choix de c. Donc $c \in G$ et $c = \min(G \cap]0, +\infty[)$. n particulier: $c\mathbb{Z} \subset G$. On suppose que $c\mathbb{Z} \neq G$. Soit alors $x \in G \setminus c\mathbb{Z}$. Il existe $k \in \mathbb{Z}$ t.q. $kc < x < (k+1)c$. On endéduit: $x - kc \in G \cap]0, c[$, ce qui contradit la définition de c. Donc $G = c\mathbb{Z}$.

(b) Soit H un sousgroupe de $(\mathbb{R}_*^+, \times)$ t.q. 1 soit un point isolé de H et soit $\ln : H \to \mathbb{R}$, $g \mapsto \ln(g)$. L'application ln est un isomorphisme de groupes de $(H, \times)$ dans $(\mathbb{R}, +)$ d'inverse $g \mapsto e^g$, et $\ln(H)$ est un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$. Par hypothèse, 1 est isolé dans H. Soit $H \cap [1, r[= \{1\}$ pour un certain $r > 0$. Alors $\ln(H \cap [1, r[) = \ln(H) \cap [0, \ln(r)[= \{0\}$ par croissance de ln, i.e. 0 est isolé dans $\ln(H)$. De (a), on déduit quil existe $c \in \mathbb{Z}$ t.q. $\ln(H) = c\mathbb{Z}$, i.e. $H = e^{c\mathbb{Z}} = (e^c)^{\mathbb{Z}}$.

2. (a) Par hypothèse: $x + ym > 1 \Rightarrow x - ym = \frac{1}{x+ym} \in]0, 1[$. De plus $-x + ym = -(x - ym) < 0$. Finalement:

$$-x + ym < 0 < x - ym < 1 < x + ym.$$

On en déduit:

$$x = \frac{1}{2}(x - ym) + \frac{1}{2}(x + ym) > 0$$

$$y = \frac{1}{2}(x + ym) - \frac{1}{2}(x - ym) > 0.$$

Finalement: $x > 0$ et $y > 0$ avec $(x, y) \in \mathbb{Z}^2 \Rightarrow x \geq 1$ et $y \geq 1$.

(b) Soit $(x + y\sqrt{m}, x' + y'\sqrt{m}) \in G_m^2$. On a:

$$(x + y\sqrt{m})(x' + y'\sqrt{m}) = xx' + yy'm + (yx' + y'x)\sqrt{m}$$

avec

$$(xx' + yy'm)^2 - (yx' + y'x)^2 m =$$
$$= (xx'+yy'm+(yx'+y'x)\sqrt{m})(xx'+yy'm-(yx'+y'x)\sqrt{m}) = (x+y\sqrt{m})(x'+y'\sqrt{m})(x-y\sqrt{}$$
$$= (x^2 - y^2 m)(x'^2 - y'^2 m) = 1.$$

De plus: $\forall (x + y\sqrt{m}) \in G_m$,

$$\frac{1}{x + y\sqrt{m}} = x - y\sqrt{m} \in G_m$$

donc G_m est un sous-groupe de $(\mathbb{R}_*^+, \times)$. S $x + y\sqrt{m} < 1$, alors $(x + y\sqrt{m})^{-1} = x - y\sqrt{m} > 1$, donc quitte à échanger y et $-y$ on peut supposer que $x+y\sqrt{m} > 1$. De (a), on déduit que $x+y\sqrt{m} \geq 1+\sqrt{m}$, i.e. $G_m \cap [1, 1+sqrtm[= \{1\}$ et 1 est isolé dans $G \cap [1, +\infty[$. De 1.(b), on déduit qu'il existe $\gamma_m \in G$ t.q. $G = \gamma^{/} Z_m$ et alors $\gamma_n \geq 1 + \sqrt{m}$.

3. Soit $q \in Q$. On a: $\forall \lambda \in \mathbb{N}^*$,

$$\lambda \in A_q \iff \exists n \in \mathbb{N}^* \quad \text{t.q.} \quad (2n+1)^2 - 4q\lambda^2 = 1$$

$$\iff \exists n \in \mathbb{N}^* \quad \text{t.q.} \quad (2n+1) \pm 2\lambda\sqrt{q} \in G_{4q}$$

Si $G_{4q} = \{1\}$, alors: $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$2n + 1 \pm 2\lambda\sqrt{q} = 1 \iff n = 0 \quad \text{et} \quad \lambda = 0.$$

Contradiction. Donc $A_{4q} = \emptyset$.
Sinon, d'après 2.(b), il existe $\gamma_{4q} \in G_{4q}$ t.q. $\gamma_{4q} \geq 1 + 2\sqrt{q}$ et $G_{4q} = \gamma_{4q}^{\mathbb{Z}}$. Soit $\lambda_{j,q} \in \mathbb{N}^*$ associé à γ_{4q}^j avec $j \geq 1$ et soit $n \in \mathbb{N}^*$ tq.:

$$2n + 1 \pm 2\lambda_{j,q}\sqrt{q} = \gamma_{4q}^{\pm j}$$

Alors:

$$\lambda_{j,q} = \frac{\gamma_{4q}^j - \gamma_{4q}^{-j}}{4\sqrt{q}}.$$

On en déduit: $\forall j \geq 1$,

$$\frac{\lambda_{j+1,q}}{\lambda_{j,q}} - \gamma_{4q} = \frac{\gamma_{4q}^{1-j} - \gamma_{4q}^{-1-j}}{\gamma_{4q}^j - \gamma_{4q}^{-j}} = \gamma_{4q}^{-j}\frac{\gamma_{4q} - \gamma_{4q}^{-1}}{\gamma_{4q}^j - \gamma_{4q}^{-j}} = \frac{\gamma_{4q} - \gamma_{4q}^{-1}}{\gamma_{4q}^{2j} - 1} > 0$$

car $\gamma_{4q} > 1$, d'où on déduit:

$$\frac{\lambda_{j+1,q}}{\lambda_{j,q}} \geq \gamma_{4q} \underset{2.(a)}{\geq} 1 + 2\sqrt{q}$$

i.e. $\lambda_{j+1,q} \geq (1 + 2\sqrt{q})\lambda_{j,q}$.

B.

1. Soit $\sqrt{b} = c\sqrt{a} + d \in \mathbb{K}(\sqrt{a})$ avec $c, d \in \mathbb{K}$. On a $b = (c\sqrt{a} + d)^2 = c^2a + 2cd\sqrt{a} + d^2$ et $\sqrt{b} \notin \mathbb{K} \Rightarrow d = 0$ et $c \neq 0$, i.e. $\sqrt{b} = c\sqrt{a}$ et $\sqrt{ab} = ca \in \mathbb{K}$.

   Inversement si $\sqrt{ab} \in \mathbb{K}$, alors $\exists c \in \mathbb{K}$ t.q.:

   $$\sqrt{b} = \frac{c}{\sqrt{a}} = c\frac{\sqrt{a}}{a} \in \mathbb{K}(\sqrt{a}).$$

2. (a) On note $\mathcal{P}(m)$ la propriété: si $q_1, \cdots, q_n$, $p_1 \cdots, p_m$ sont $n + m$ nombres premiers distincts, $n \geq 1$, alors $\sqrt{q_1 \cdots q_n} \notin \mathbb{Q}(\sqrt{p_1}, \cdots, \sqrt{p_m})$.

   Soient $p_1, q_1, \cdots, q_n$, $n+1$ nombres premiers distincts. On suppose que $\sqrt{q_1 \cdots q_n} \in \mathbb{Q}(\sqrt{p_1})$, alors

   $$\sqrt{q_1 \cdots q_n} \notin \mathbb{Q} \quad \text{et} \quad \sqrt{p_1} \notin \mathbb{Q} \underset{1.}{\Rightarrow} \sqrt{p_1 q_1 \cdots q_n} \in \mathbb{Q}$$

   en contradiction avec $p_1 q_1 \cdots q_n$ nombres premiers distincts. Donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie.

   On suppose $\mathcal{P}(m)$ vraie. Soient $q_1, \cdots, q_n$, $p_1 \cdots, p_m, p_{m+1}$, $n + m + 1$ nombres premiers distincts. On suppose que $\sqrt{q_1 \cdots q_n} \in \mathbb{Q}(\sqrt{p_1}, \cdots, \sqrt{p_m}, \sqrt{p_{m+1}}) = \mathbb{Q}(\sqrt{p_1}, \cdots, \sqrt{p_m})(\sqrt{p_{m+1}})$. Par hypothèse de récurrence:

   $$\sqrt{q_1 \cdots q_n} \notin \mathbb{Q}(\sqrt{p_1}, \cdots, \sqrt{p_m} \quad \text{et} \quad \sqrt{p_{m+1}} \notin \mathbb{Q}(\sqrt{p_1}, \cdots, \sqrt{p_m})$$
   $$\underset{1.}{\Rightarrow} \sqrt{q_1 \cdots q_n p_{m+1}} \in \mathbb{Q}(\sqrt{p_1}, \cdots, \sqrt{p_m})$$

   ce qui contredit à nouveau l'hypothèse de récurrence. Donc $\mathcal{P}(m+1)$ est vraie.

   Par récurrence sur $m \geq 1$; $\mathcal{P}(m)$ est vraie $\forall m \geq 1$. en contradiction avec $p_1, q_1, \cdots, q_n$ nombres premiers distincts. Donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie.

   (b) On suppose qu'il existe $q_1, \cdots, q_n \in Q$ et $\lambda_1, \cdots, \lambda_n \in \mathbb{Q}$ t.q. $\sum_{i=1}^n \lambda_i \sqrt{q_i} = 0$. Quitte à diviser $q_1, \cdots, q_n$ par leur plus grand commun diviseur, on peut supposer que $q_1, \cdots, q_n$ sont premiers entre eux. On suppoe que $\lambda_{i_0} \neq 0$ pour un indice $i_0 \in [[1, n]]$. Alors

   $$\sqrt{q_{i_0}} = -\sum_{i \neq i_0} \frac{\lambda_i}{\lambda_{i_0}} \sqrt{q_i} \in \mathbb{Q}(\sqrt{p_1}, \cdots \sqrt{p_m})$$

où $\{p_1, \cdots, p_m\}$ désigne l'ensemble des facteurs premiers de la famille $\{q_i,\ \ i \neq i_0\}$. De (a), pon déduit que q_{i_0} est divisible par l'un au moins des p_i, $i \in [[1, m]]$, ce qui contredit $q_1, \cdots, q_n$ premiers entre eux. Donc la famille $(\sqrt{q})_{q\in Q}$ est $\mathbb{Q}$-libre.

3. On remarque que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la décomposition en facteurs premiers de $n(n+1)$ est de la forme $n(n+1) = q\lambda^2$ avec $\lambda \in \mathbb{N}^*$, où q, resp. λ^2, est le produit des facteurs d'exposants impairs, resp. pairs. Nécessairement $q \in Q$ et de A.3., on déduit que λ et lié à $q \in Q$ par la condition $\lambda \in A_q$. On en déduit que $\Lambda \cap \mathbb{R}_*^+ = \cup_{q\in Q} A_q$. D'après A.3, $A_q \neq \emptyset$ est de la forme: $A_q = \{\lambda_{j,q},\ j \geq 1\} \subset \mathbb{N}^*$ avec $\lambda_{j+1,q} \geq (1 + 2\sqrt{q})\lambda_{j,q} \geq 3\lambda_{j,q}$, $\forall j \geq 1$. De II.B.2., on déduit que Λ est dissociée. De II.B.2.(c), on déduit que Λ est un ensemble de Sidon réel et qie $K'(\Lambda) \leq 2$.

IV. Polynômes trigonométriques aléatoires

A. Inégalité de Bernstein faible

1. On a: $\forall t \in \mathbb{R}$,

$$p'(t) = \sum_{k=1}^{n} ika_k e^{ikt} \Rightarrow |p'(t)| \leq \sum_{k=1}^{n} k|a_k| \leq \sum_{k=1}^{n} k\|p\|_\infty = \frac{n(n+1)}{2}\|p\|_\infty.$$

2. Soit $t_0 \in [0, 2\pi]$ t.q. $p(t_0) = \|p\|_\infty$, qui existe car p est continu sur le compact $[0, 2\pi]$. On a: $\forall t \in S := [t_0 - \frac{1}{2\alpha_n}, t_0 + \frac{1}{2\alpha_n}]$, en appliquant la formule des AF:

$$|p(t) - p(t_0)| \leq |t - t_0|\|p'\|_\infty \leq \alpha_n |t - t_0|\|p\|_\infty \leq \frac{1}{2}\|p\|_\infty$$

$$\Rightarrow |p(t_0)| = \|p\|_\infty \leq \frac{1}{2}\|p\|_\infty + |p(t)|$$

donc

$$|p(t)| \geq \frac{1}{2}\|p\|_\infty.$$

B.

1. On a: $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$\cosh(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{x^{2n}}{(2n)!} \quad \text{et} \quad e^{x^2/2} = \sum_{n\geq 0} \frac{x^{2n}}{2^n n!}$$

avec: $\forall n \geq 1$,

$$\frac{2^n n!}{(2n)!} = \frac{2^n}{\Pi_{k=1}^n (n+k)} \leq \frac{2^n}{(n+1)^n} = \left(\frac{2}{n+1}\right)^n < 1$$

donc $\dfrac{x^{2n}}{(2n)!} \leq \dfrac{x^{2n}}{2^n n!}$, $\forall n \geq 1 \Rightarrow \cosh x \leq e^{x^2/2}$, $\forall x \in \mathbb{R}$

2. On a:

$$\mathbb{E}(e^{\text{Re}Z}) = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{2}e^{\text{Re}(a_k)} + \frac{1}{2}e^{-\text{Re}(a_k)}\right) = \sum_{k=1}^n \cosh(\text{Re}(a_k))$$

3. (a) Soit $\lambda > 0$. On a

$$\mathbb{E}(e^{\lambda \text{Re}(Z)}) \underset{\lambda\in\mathbb{R}}{=} \mathbb{E}(e^{\text{Re}(\lambda Z)}) \underset{2.}{=} \Pi_{k=1}^n \cosh(\text{Re}(\lambda a_k)).$$

De même:

$$\mathbb{E}(e^{-\lambda \text{Re}(Z)}) \underset{\lambda\in\mathbb{R}}{=} \mathbb{E}(e^{\text{Re}(-\lambda Z)}) \underset{2.}{=} \Pi_{k=1}^n \cosh(\text{Re}(-\lambda a_k))$$

donc, e remarquant que $e^{\pm\lambda \text{Re} Z} > 0$:

$$\mathbb{E}(e^{\lambda|\text{Re}(Z)|}) \leq \mathbb{E}(e^{\lambda \text{Re}(Z)}) + \mathbb{E}(e^{-\lambda \text{Re}(Z)}) = 2\Pi_{k=1}^n \cosh(\text{Re}(\lambda a_k))$$

car $x \mapsto \cosh x$ est paire, donc

$$\mathbb{E}(e^{\lambda|\text{Re}(Z)|}) \underset{1.}{\leq} 2\Pi_{k=1}^n e^{|\text{Re}(\lambda a_k)|^2/2} = 2\Pi_{k=1}^n e^{\lambda^2|\text{Re}(a_k)|^2/2} =$$

$$= 2e^{\sum_{k=1}^n \frac{\lambda^2}{2}|\text{Re}(a_k)|^2}$$

(b) On a, la fonction exponentielle étant croissante sur $\mathbb{R}$::

$$\mathbb{E}(e^{\lambda|Z|}) \leq \mathbb{E}(e^{\lambda|\mathrm{Re}Z|+\lambda|\mathrm{Im}Z|}) = \mathbb{E}(e^{\lambda|\mathrm{Re}Z|}e^{\lambda|\mathrm{Im}Z|})$$

et le même raisonnement que pour 2.

$$\mathbb{E}(e^{\mathrm{Im}Z}) = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2}e^{\mathrm{Im}(a_k)} + \frac{1}{2}e^{-\mathrm{Im}(a_k)}\right) = \sum_{k=1}^{n}\cosh(\mathrm{Im}(a_k))$$

$$\Rightarrow \mathbb{E}(e^{\lambda\mathrm{Im}(Z)}) \underset{\lambda\in\mathbb{R}}{=} \mathbb{E}(e^{\mathrm{Im}(\lambda Z)}) \underset{2.}{=} \Pi_{k=1}^{n}\cosh(\mathrm{Im}(\lambda a_k)).$$

On en déduit, commepour (a):

$$\mathbb{E}(e^{\lambda|\mathrm{Im}(Z)|}) \underset{1.}{\leq} 2\Pi_{k=1}^{n}e^{|\mathrm{Im}(\lambda a_k)|^2/2} = 2\Pi_{k=1}^{n}e^{\lambda^2|\mathrm{Im}(a_k)|^2/2} =$$

$$= 2e^{\sum_{k=1}^{n}\frac{\lambda^2}{2}|\mathrm{Im}(a_k)|^2}.$$

L'inégalité de Cauchy-Schwarz entraîne:

$$\mathbb{E}(e^{\lambda|Z|}) \leq \sqrt{\mathbb{E}(e^{2\lambda|\mathrm{Re}Z|})}\sqrt{\mathbb{E}(e^{2\lambda|\mathrm{Im}Z|})} \leq$$

$$\leq 2e^{\sum_{k=1}^{n}\frac{\lambda^2}{2}|\mathrm{Re}(a_k)|^2}e^{\sum_{k=1}^{n}\frac{\lambda^2}{2}|\mathrm{Im}(a_k)|^2} = 2e^{\lambda^2\sum_{k=1}^{n}|a_k|^2}$$

C.

1. (a) Soit $\lambda > 0$. On a

$$\int_0^{2\pi} e^{\lambda|Z_t(\omega)|}dt = \int_0^{2\pi} e^{\lambda|p_\omega(t)|}dt \underset{A.2}{\geq} \int_S e^{\lambda\|p_\omega\|_\infty/2}dt = \frac{1}{\alpha_n}e^{\lambda M(\omega)/2}.$$

(b) On a, par le Théorème de Fubini:

$$\mathbb{E}(e^{\lambda M/2}) \leq \alpha_n\mathbb{E}\left(\int_0^{2\pi} e^{\lambda|Z_t(\omega)|}dt\right) = \alpha_n\int_0^{2\pi}\mathbb{E}\left(e^{\lambda|Z_t(\omega)|}\right)dt$$

$$\underset{B.3.(b)}{\leq} 2\alpha_n\int_0^{2\pi} e^{\lambda^2\sum_{k=1}^{n}|a_k|^2} = 4\pi\alpha_n e^{\lambda^2\sum_{k=1}^{n}|a_k|^2}.$$

2. (a) On suppose que: $\forall \omega \in \Omega$,

$$M(\omega) > 2\left(\frac{1}{\lambda}\ln(4\pi\alpha_n) + \lambda\sum_{k=1}^{n}|a_k|^2\right).$$

Comme $x \mapsto e^x$ est continue et > 0, on en déduit:

$$\mathbb{E}(e^{\lambda M/2}) > e^{\ln(4\pi\alpha_n)+\lambda^2\sum_{k=1}^{n}|a_k|^2} = 4\pi\alpha_n\, e^{\lambda^2\sum_{k=1}^{n}|a_k|^2}$$

en contradiction avec 1.(b).

(b) En posant:

$$a = \ln(4\pi\alpha_n), \quad b = \sum_{k=1}^{n}|a_k|^2,$$

on est ralené à cherchr $\lambda > 0$ t.q.:

$$2\left(\frac{a}{\lambda} + \lambda b\right) = 4\sqrt{ab} \iff \lambda^2 b - 2\lambda\sqrt{ab} + a = 0$$

$$\iff (\lambda\sqrt{b} - \sqrt{a})^2 = 0 \iff \lambda = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \frac{\ln(4\pi\alpha_n)}{\sqrt{\sum_{k=1}^{n}|a_k|^2}}.$$

Pour ce choix de λ:

$$M(\omega) \leq 2\left(\frac{a}{\lambda} + \lambda b\right) = 4\sqrt{ab} = 4\sqrt{\ln(4\pi\alpha_n)\sum_{k=1}^{n}|a_k|^2}.$$

3. On pose: $\forall k \in \mathbb{N}$,

$$a_k = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad k \in \Lambda, \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Alors

$$M(\omega) \underset{2.(b)}{\leq} 4\sqrt{\ln(4\pi\alpha_n)\sum_{k=1}^{n}|a_k|^2} = 4\sqrt{\ln(4\pi\alpha_n)|\Lambda \cap \{1,\cdots,n\}|}$$

et

$$M(\omega) = \|p_\omega\|_\infty \geq \frac{N(p_\omega)}{K(\Lambda)} = \frac{\sum_{k=1}^{n}|a_k|}{K(\Lambda)} = \frac{|\Lambda \cap \{1,\cdots,n\}|}{K(\Lambda)}$$

$$\Rightarrow \sqrt{|\Lambda \cap \{1,\cdots,n\}|} \leq 4K(\Lambda)\sqrt{\ln(4\pi\alpha_n)}$$

i.e.

$$|\Lambda \cap \{1,\cdots,n\}| \leq 16K(\Lambda)^2\ln(4\pi\alpha_n).$$

V. Vibrations des sphères

1. Soit $\varepsilon > 0$. D'après I.B.3(b), il existe $n_0 > 0$ t.q.

$$\forall n \geq n_0, \quad \forall x \in I_\eta, \quad |L_n(x)| \leq \varepsilon.$$

Soit $n > n_0$. D'après I.B.2.: $\forall (t,x) \in \mathbb{R} \times I_\eta$,

$$|u_n(t,x)| \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} |L_k(x)| \leq \frac{1}{n}(n_0 + \varepsilon(n - n_0)) = \frac{n_0}{n}(1-\varepsilon) + \varepsilon$$

Soit $n_1 > n_0$ t.q. $\frac{n_0}{n} < \varepsilon$, $\forall n \geq n_1$. On a alors:

$$\forall n \geq n_1, \quad \forall (t,x) \in \mathbb{R} \times I_\eta, \quad |u_n(t,x)| \leq \varepsilon(2-\varepsilon) < 2\varepsilon.$$

2. On a: $\forall n \geq 1$, $\forall t \in \mathbb{R}$

$$u_n(t, \pm 1) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \delta_{k,n} (-1)^k e^{i\sqrt{k(k+1)}t}$$

avec

$$|u_n(t,\pm 1)| \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} 1 = 1 \Rightarrow \sup_{t \in \mathbb{R}} |u_n(t, \pm 1)| \geq 1.$$

D'après III.B.3. et I.A.2.(b): la famille $\Lambda = \{\pm\sqrt{n(n+1)},\ n \in \mathbb{N}^*\}$ est un ensemble de Sidon réel de constante $K'(\Lambda) = 2$ et

$$p(u_n(t,\pm 1)) = 1 \leq 2K'(\Lambda) \sup_{t \in \mathbb{R}} |u_n(t,\pm 1)| \Rightarrow \sup_{t \in \mathbb{R}} |u_n(t, \pm 1)| \geq \frac{1}{4}.$$

3. (a) On remarque que:

$$\forall n \geq 1, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad v_n(t,x) = \frac{e^{it/2}}{n} \sum_{k=1}^{n} \delta_{k,n} e^{ikt} L_k(x).$$

Soit $t \in \mathbb{R}$ et soit $n \geq 1$. L'application $x \mapsto v_n(t,x)$ est continue sur le compact $[-1,1]$, donc elle y atteint son maximum.

Si ce maximum est atteint en $x_0 \in]-1,1[$, alors $\dfrac{\partial v_n}{\partial x}(t,x_0) = \dfrac{\partial^2 v_n}{\partial x^2}(t,x_0) = 0$ et on en déduit:

$$D(v_n)(t,x_0) = -\frac{e^{it/2}}{n}\sum_{k=1}^{n} \delta_{k,n} k(k+1) e^{ikt} L_k(x_0) = 0.$$

avec $\forall k \in [[1,n]],\ \delta_{k,n} k(k+1) \neq 0 \underset{I.A.1.(b)}{\Rightarrow} L_k(x_0) = 0,\ \forall k \in [[1,n]]$. On en déduit que $v_n(t,x_0) = 0$, $\forall t \in \mathbb{R}$, ce qui contredit $|v_n(t,x_0)| = \sup_{x\in[-1,1]} |v_n(t,x)|$. Donc

$$\max_{x\in[-1,1]} |v_n(t,x)| = \max_{x\in\{-1,1\}} |v_n(t,x)|$$

avec

$$v_n(t,\pm 1) = \frac{e^{it/2}}{n} R_n(\pm e^{it})$$

et $R_n(-e^{it}) = R_n(e^{i(t+\pi)}) \Rightarrow$

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad \sup_{x\in[-1,1]} |v_n(t,x)| \leq \frac{1}{n}\sup_{u\in\mathbb{R}} |R_n(e^{iu})|$$

(b) On a: $\forall n \geq 1$,

$$\frac{4}{n}\sqrt{n\ln(4\pi\alpha_n)} = \frac{4}{n}\sqrt{n\ln(2\pi n(n+1))} = 4\sqrt{\frac{1}{n}\ln(2\pi n(n+1))}$$

avec

$$\frac{1}{n}\ln(2\pi n(n+1)) = \frac{\ln(2\pi)}{n} + \frac{\ln(n)}{n} + \frac{\ln(n+1)}{n} \underset{n\to+\infty}{\to} 0$$

donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{4}{n}\sqrt{n\ln(4\pi\alpha_n)} = 0$. On déduit de (a) que $(v_n)_{n\geq 1}$ converge uniformément vers 0 sur $\mathbb{R}\times[-1,1]$.

De plus, de I.B.2., on déduit que : $\forall n \geq 1$, $\forall (t,x) \in [-T,T]\times[-1,1]$,

$$|u_n(t,x) - v_n(t,x)| \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} |e^{i(2k+1)t/2} - e^{i\sqrt{k(k+1)}t}|$$

avec: $\forall k \in [1, n]]$,

$$|e^{i(2k+1)t/2} - e^{i\sqrt{k(k+1)}t}| = |\int_{\sqrt{k(k+1)}t}^{(2k+1)t/2} e^{iu} du| \leq$$

$$\leq \left|\frac{(2k+1)t}{2} - \sqrt{k(k+1)}t\right| \leq \left|\frac{(2k+1)}{2} - \sqrt{k(k+1)}\right| T =$$

$$= \left|k + \frac{1}{2} - \sqrt{k(k+1)}\right| T = \left|O\left(\frac{1}{k}\right)\right| T \leq C\frac{T}{k}$$

donc

$$|u_n(t,x) - v_n(t,x)| \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} C\frac{T}{k}$$

Soit $\varepsilon > 0$ et soit $n_0 > 0$ t.q. $\frac{1}{n} \leq \varepsilon$, $\forall n \geq n_0$. Soit $n > n_0$. Alors: $\forall (t,x) \in [-T, T] \times [-1, 1]$,

$$|u_n(t,x) - v_n(t,x)| \leq \frac{CT}{n}\left(n_0 + \varepsilon(n - n_0)\right) \leq CT\left(\frac{n_0}{n} + \varepsilon\right).$$

On fixe $n_1 > n_0$ t.q. $\dfrac{n_0}{n} \leq \varepsilon$. Alors: $\forall n \geq n_1$, $\forall (t,x) \in [-T, T] \times [-1, 1]$,

$$|u_n(t,x) - v_n(t,x)| \leq 2CT\varepsilon.$$

On peut supposer en outre, par l'uniforme convergence de v_n vers 0, que $\forall n \geq n_1$, $\forall (t,x) \in \mathbb{R} \times [-1, 1]$,

$$|v_n(t,x)| \leq \varepsilon.$$

Alors: $\forall n \geq n_1$, $\forall (t,x) \in [-T, T] \times [-1, 1]$,

$$|u_n(tx, x)| \leq (2CT + 1)\varepsilon.$$