Université de Rennes 1 — 16 octobre 2022
UFR Mathématiques
M2 Agrégation Externe

Polynôme minimal, Cayley-Hamilton, décomposition de Dunford

1 Polynômes caractéristique et minimal

Exercice 1 Soit f un endomorphisme inversible de $\mathbb{R}^n$. Montrer que f^{-1} est un polynôme en f.

Exercice 2

1. Donner, si possible, un exemple de matrice dont le polynôme caractéristique est P et le polynôme minimal m dans chacun des cas suivants :
   (a) $P = X^2 - 1$, $m = X^2 - 1$
   (b) $P = X^2 - 1$, $m = X - 1$
   (c) $P = -X^3$, $m = X^2$
   (d) $P = -X^3$, $m = X$
2. Donner deux matrices A et B dans $M_n(\mathbb{R})$ qui ont mêmes polynôme caractéristique et mêmes polynôme minimal et qui ne sont pas semblables.

Exercice 3 Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & \lambda & \lambda \\ 0 & 0 & \lambda^2 \end{pmatrix}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$. Déterminer le polynôme caractéristique et le polynôme minimal de A.

Exercice 4 Soit $M \in M_n(\mathbb{C})$ telle que M est-elle semblable à $2M$. Montrer que M est nilpotente.

Exercice 5 Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 0 & 6 & -3 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$

On en donne le polynome caractéristique $P_A(X) = -(X-2)^2(X-3)$.
Calculer A^n.

Exercice 6 Soit $\chi : M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}_n[X]$ l'application qui associe à A son polynôme caractéristique χ_A.

Est-ce que χ est continue ?

Même question avec $m : M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}_n[X]$ l'application qui associe à A son polynôme minimal m_A.

2 Polynômes d'endomorphismes et diagonalisibilité

Exercice 7 Soit A une matrice circulante de $M_n(\mathbb{C})$:

$$A = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & \dots & a_{n-2} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_2 & a_3 & \dots & a_0 \end{pmatrix}$$

Montrer que A est diagonalisable.

On pourra exprimer A en fonction de la matrice

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 8 Soit K un corps fini de cardinal q. Donner une CNS diagonalisation d'un endomorphisme de $\mathcal{L}(K^n)$ à l'aide d'un polynôme fixe.

Exercice 9 Soit u un endomorphisme dans $\mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$.

Montrer que u est diagonalisable ssi $\mathbb{C}[u]$ est un produit de corps ssi $\mathbb{C}[u]$ ne contient aucun élément nilpotent autre que 0.

3 Décomposition de Dunford

Exercice 10 Décomposition de Dunford.

Soit u un endomorphisme de $\mathcal{L}(\mathbb{C}^k)$. On veut montrer qu'il existe un unique couple d'endomorphismes (d, n) de $\mathbb{C}^k$ tels que $u = d + n$ avec d diagonalisable et n nilpotent et $d \circ n = n \circ d$.

On veut montrer de plus que d et n sont des polynômes en u.

1) Traiter le cas où u possède une valeur propre unique.

2) En utilisant le théorème de décomposition des noyaux, traiter le cas où u possède exactement deux valeurs propres.

3) Et si u est un endomorphisme de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^k)$?

Exercice 11 Donner la décompositon de dunford de $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Exercice 12 Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 0 & 6 & -3 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$

On en donne le polynome caractéristique $P_A(X) = -(X-2)^2(X-3)$.

1. Quelle est la décomposition de Dunford de A ?
2. Calculer $\exp(A)$.

Exercice 13 Soit u un endomorphisme de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$. Montrer que $\exp(u)$ est un polynôme en u.