5. Décomp. des représentations

<u>Rappel</u> : nous avons démontré :

$$\begin{array}{ccc}
\left\{\begin{array}{c}\text{classes d'iso.}\\ \text{de rep. irr.}\end{array}\right\} & \xrightarrow{\sim} & \left\{\begin{array}{c}\text{carac.}\\ \text{irréd}\end{array}\right\} = \mathrm{Irr}(G) \\
\downarrow & & \downarrow \\
\left\{\begin{array}{c}\text{classes d'iso}\\ \text{de rep.}\end{array}\right\} & \twoheadrightarrow & \{\text{carac.}\}
\end{array}$$

et on a montré que $\mathrm{Irr}(G)$ est fini de cardinal $h = |\mathrm{Conj}\, G|$.
Pour chaque $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$ il existe donc une rep. irr. de carac. χ, unique à iso près, choisissons-en une : V_χ.

5.1.

<u>Th 5.1.1</u> : Soit V une rep. de carac. φ. Soit $V = W_1 \oplus \dots \oplus W_s$ une décomp. en irréd, et soit $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$.

(1) Le nb des W_i isomorphes à V_χ est égal à (φ, χ).
Il ne dépend pas de la décomp. choisie, on l'appelle <u>multiplicité de V_χ dans V</u>.

(2) Soit $W_\chi \subset V$ le sous-espace somme des W_i isom à V_χ.

(i) on a une décomp. $V = \bigoplus_{\chi \in \mathrm{Irr}(G)} W_\chi$ et le proj. sur W_χ associé est $p_\chi := \dfrac{\dim V_\chi}{|G|} \sum_{g \in G} \overline{\chi}(g)\, g_V$.

(ii) le sous-espace W_χ, isom. à $V_\chi^{\oplus(\varphi,\chi)}$ ne dépend pas de la décomp. choisie.

W_χ := comp isotypique
$V = \oplus W_\chi$ décomp. canonique

Rem : (1) le projecteur sur W_χ est l'image par $\tilde{\rho} : \mathbb{C}[G] \to \mathrm{End}(V)$ de $\tilde{p}_\chi := \frac{\dim V_\chi}{|G|} \sum_g \bar{\chi}(g) \cdot g$.
universel !

(2) Si $G = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et $\zeta = e^{2i\pi/n}$, les rep. irréd. sont $V_i = \mathbb{C}$ avec action $m \cdot z = \zeta^{m} \cdot z$

La décomp canonique est $V = \bigoplus_{i=0}^{n-1} W_i$ $\quad W_i = \{ v \in V,\ m \cdot v = \zeta^{m} \cdot v \}$
sous-espace propre

(3) La canonicité a des conséquences sympathiques : si $f : V \to V'$ G-morphisme (ex : G-autom) alors $f(W_\chi) \subseteq W'_\chi$.

Dém : (1) Soit χ_i = carac. de W_i. On a $\varphi = \chi_1 + \dots + \chi_s$.

donc $(\varphi, \chi) = (\chi_1, \chi) + \dots + (\chi_s, \chi) = \#\{ i \,;\ \chi_i = \chi \}$
$= \# \{ i \,;\ W_i \simeq V_\chi \}$.

(2) (i) ~~en Cor 4.2.2 (2) on a mq la restriction de~~
on a la décomp. annoncée, vue la def de W_χ.

Maintenant regardons la fn centrale $\bar{\chi}$, sur une sous-rep. isomorphe à V_ψ : $W \simeq V_\psi \subseteq V$.

Cor 4.2.2.(2) a mq $\bar{\chi}_W$ = hom. de rapport $\frac{|G|}{\dim W} (\bar{\chi}, \bar{\psi})$.

$$\text{donc } \frac{\dim V_\chi}{|G|} \bar{\chi}|_{W_\psi} = \begin{cases} \text{hom. de rapp } 1 & \text{si } \psi = \chi \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Donc $p_\chi := \frac{\dim V_\chi}{|G|} \bar{\chi}$ est bien le projecteur sur W_χ.

⚠ ne pas confondre $\chi_V :=$ notation pour le caractère d'une rep V, et $\chi_V :=$ incarnation dans V d'un caractère $\chi \in \mathbb{C}[G]$ (qui n'a peut-être rien à voir avec V).

<u>Cor</u> : Deux rep. de m̂ carac. sont isom.

<u>Dém</u> elles contiennent le m̂ nb de fois tte rep. irr. donnée.

L'application $\twoheadrightarrow$ ci-dessus est donc bij.

<u>Th</u> Si φ est un carac. alors $(\varphi, \varphi) \in \mathbb{N}$,
et $(\varphi, \varphi) = 1 \Leftrightarrow$ ce carac est irréductible.

<u>Dém</u> $V = \bigoplus_{\chi} V_\chi^{\oplus m_\chi}$ où $m_\chi = (\varphi, \chi)$.

$$\Rightarrow (\varphi, \varphi) = \left(\sum_{\chi} m_\chi \cdot \chi \,,\, \sum_{\chi'} m_{\chi'} \cdot \chi' \right) = \sum_{\chi} (m_\chi)^2$$

<u>5.2.</u>

<u>5.2.1 Prop</u>

<u>5.2.2 Cor</u>

<u>7.1.2 Cor</u> G abélien ssi ttes ses rep irr sont de dim 1

<u>Dém</u> G ab ssi $|\mathrm{Conj}\, G| = |G|$ ssi $|\mathrm{Irr}(G)| = |G|$.

Formule de Burnside : $|G| = \sum_{\mathrm{Irr}\, G} d_\chi^2 \Rightarrow d_\chi = 1 \;\forall \chi$

$\boxtimes$.

Représentations du cube et du tétraèdre $G = (S_4)$. (4)

$\chi \backslash \bar{g}$	1_1	$(12)_6$	$(123)_8$	$(12)(34)_3$	$(1234)_6$
1	1	1	1	1	1
ε	1	-1	1	1	-1
Δ	2	0	-1	2	0
	3	1	0	-1	-1
	3	-1	0	-1	1

<u>Lm</u> : soit $G \overset{\pi}{\twoheadrightarrow} H$ surjection, si V est une rep irr. de H, alors "c'est" une rep. irr. de G

<u>Dém</u> : ~~Soit~~ la rep. de G est $g \cdot v = \pi(g) \cdot v$.

si $W \subset V$ est G-stable : $gv \in W \quad \forall v \in W$

alors il est H-stable : $\forall h \in H \ \exists g \in G, \pi g = h$ et
$h \cdot v = g \cdot v \in W$ $\boxtimes$

Donc la rep. du Δ sous S_3 est irréductible vue comme représ. de S_4 via

$$\pi : S_4 \twoheadrightarrow S_{\{\text{doubls. transp}\}} \cong S_3$$

(π surj car $\alpha = (12)(34)$ $\beta = (13)(24)$ $\gamma = (14)(23)$

$(13). \alpha = (13) \cdot \alpha \cdot (13) = (14)(23)$ donc $\pi(13) = (\alpha\gamma)$)

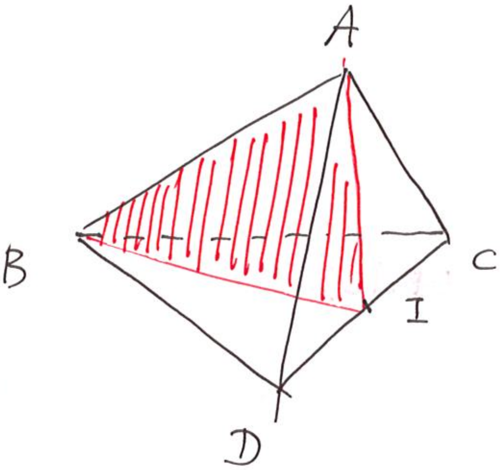
et $\ker(\pi) = V_4$ le gpe de Klein.

$(12)(34) \in \ker(\pi)$

$(12)(34)(1234) = (24) \Rightarrow \pi(1234) = \pi(24)$

<u>Irréductibilité</u> : $\frac{1}{24}(4 + 8 + 3 \times 4) = 1$ ✓

Rep. du tétraèdre $T =$  $= ABCD$

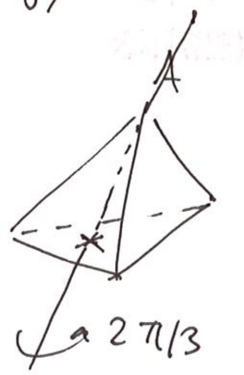


Lm le mor. de groupes $\mathrm{Isom}(T) \longrightarrow \mathfrak{S}_{\{A,B,C,D\}}$ est un iso.

Dém: Soit $I = \text{mil}[CD]$
et $\mathcal{P} =$ plan ABI.
La réflexion / $\mathcal{P}$ réalise la transposition (CD) $\boxtimes$

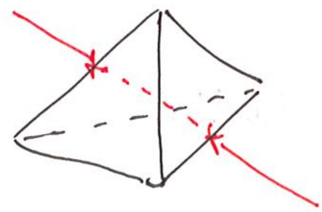
On liste les classes de conjugaison:

$g = (12)$: on vient de le voir : $\begin{pmatrix} -1 & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$ $\chi(g) = 1$



$g = (123)$: rotations $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \multicolumn{2}{c}{R_{2\pi/3}} \\ 0 & \multicolumn{2}{c}{\text{ou } R_{4\pi/3}} \end{pmatrix}$ $\chi(g) = 0$

$g = (12)(34)$ $\begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & -1 & \\ 0 & & -1 \end{pmatrix}$ $\chi(g) = -1$



$g = (1234)$

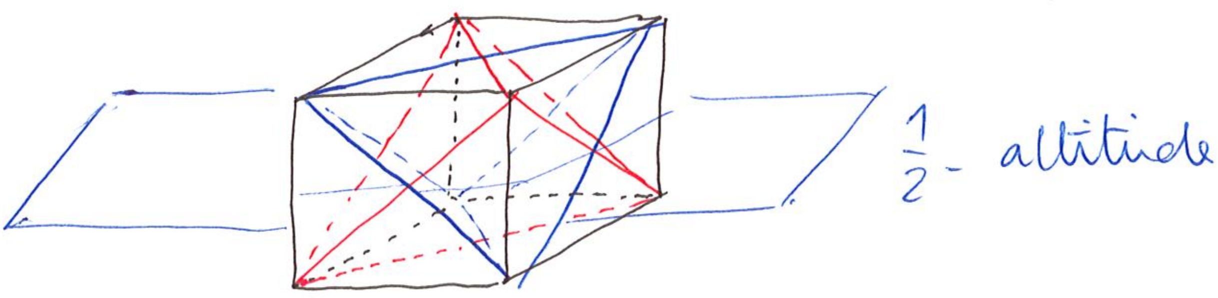
$g^4 = 1 \Rightarrow \mathrm{Sp}(g) \subset \{\pm 1, \pm i\}$

$g^2 \neq 1 \Rightarrow \mathrm{Sp}(g) \not\subset \{\pm 1\}$

$g \in O_3(\mathbb{R})$ réelle $\Rightarrow \mathrm{Sp}(g) \supset \{i, -i\}$

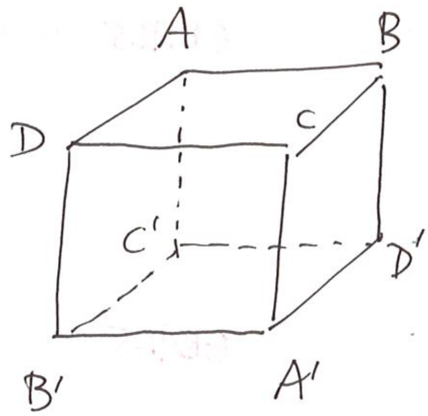
$\det(g) = \varepsilon(g) = -1 \Rightarrow \mathrm{Sp}(g) = \{-1, i, -i\} \Rightarrow \chi(g) = -1$

Irréductibilité: $\frac{1}{24}(9 + 6 + 3 + 6) = 1$ ✓



Rep du cube

$C =$  $= ABCDA'B'C'D'$



Lm $\mathcal{D} := \{(AA'), \dots, (DD')\}$ "gdes diag." du cube

Alors $\underset{\displaystyle SO_3(\mathbb{R})}{\underset{\cap}{\mathrm{Isom}^+(C)}} \longrightarrow \mathfrak{S}_{\mathcal{D}}$ isom.

Dém faites l'exercice ! $\boxtimes$

On liste les classes : ordre$(g) = n \Rightarrow \chi(g) = 1 + 2\cos\frac{2k\pi}{n}$
$(k,n) = 1$

$g = (12)$ ordre 2 $\Rightarrow$ $\chi(g) = -1$

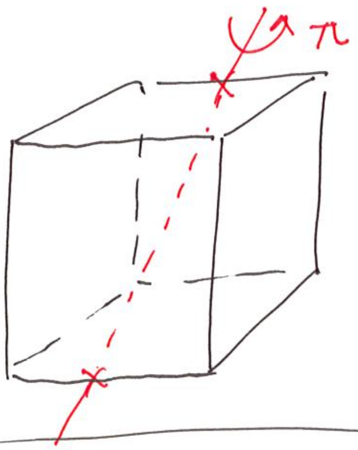
$g = (123)$ ordre 3 $\Rightarrow$ $\chi(g) = 0$

$g = (12)(34)$ $\chi(g) = -1$

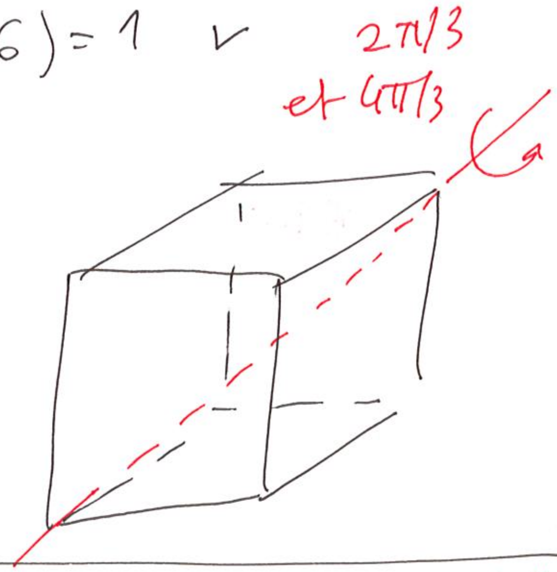
$g = (1234)$ ordre 4 $\Rightarrow$ $\chi(g) = 1$

Irréductibilité $\frac{1}{24}(9 + 6 + 3 + 6) = 1$ ✓

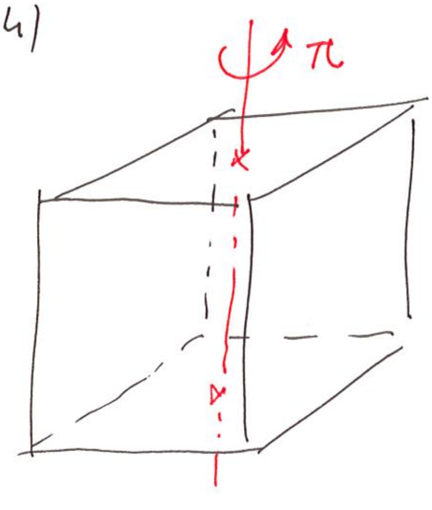
$g = (12)$



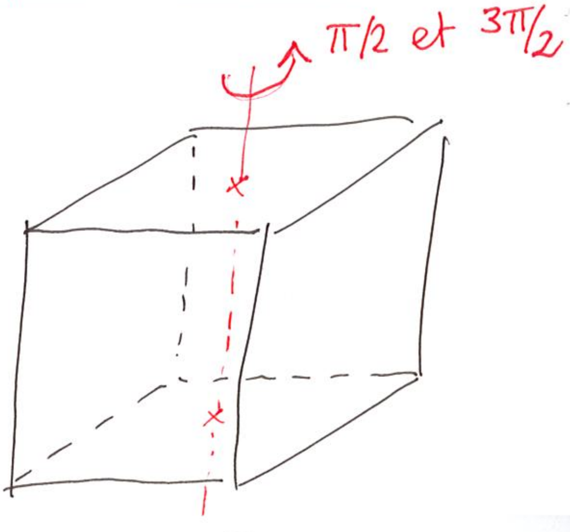
$g = (123)$



$g = (12)(34)$



$g = (1234)$



ORTHOGONALITÉ DES COLONNES

8.5 Exercice. ([Rau00], prop. 5.10) Soit G un groupe fini et T_G sa table de caractères. Pour chaque classe de conjugaison $C \in \mathrm{Conj}(G)$, on note $\delta_C = \sum_{g\in C} g$ la fonction indicatrice de C.

(1) On note $\delta_C = \sum_{\chi\in\mathrm{Irr}(G)} \lambda_\chi(C)\chi$ l'écriture de δ_C sur la base des caractères irréductibles. Donnez une expression pour $\lambda_\chi(C)$.

(2) On considère le produit scalaire hermitien standard $\langle x, y\rangle = \sum x_i\bar{y}_i$ sur $\mathbb{C}^h$ où $h = |\mathrm{Conj}(G)|$. En évaluant δ_C sur un élément $k \notin C$, montrez que les colonnes de T_G sont orthogonales deux à deux. En évaluant δ_C sur un élément $k \in C$, montrez que la norme de la colonne d'indice C est égale à $|G|/|C|$. (Voir proposition 6.3.)

(1) δ_C est une fonction centrale, donc on peut l'écrire $\delta_C = \sum_\chi \lambda_\chi(C)\cdot\chi$ sur la base des car. irr.

$$(\delta_C, \chi') = \sum_\chi \lambda_\chi(C).(\chi,\chi') = \lambda_{\chi'}(C) \quad \text{orthogonalité}$$

$$\|$$

$$\left(\sum_{g\in C} g, \chi'\right) = \sum_{g\in C}(g,\chi') = \frac{1}{|G|}\sum_g\sum_h \underbrace{g(h)}_{\delta_{gh}}\overline{\chi'(h)} = \frac{1}{|G|}\sum_g \overline{\chi'(g)}$$

$$\Rightarrow \lambda_\chi(C) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in C}\overline{\chi(g)}.$$

(2) On a mq $\delta_C = \sum_\chi \frac{1}{|G|}\sum_{g\in C}\overline{\chi(g)}\cdot\chi$.

Soit $k\in G$. On a:

$$\delta_C(k) = \sum_\chi \frac{1}{|G|}\sum_{g\in C}\overline{\chi(g)}\,\chi(k)$$

$$= \frac{1}{|G|}\sum_\chi \chi(k)\underbrace{\sum_{g\in C}\overline{\chi(g)}}_{\overline{\chi(g)}\times|C|}$$

$$= \frac{|C|}{|G|}\sum_\chi \chi(k)\overline{\chi(g)} = \frac{|C|}{|G|}\langle \mathrm{Col}_k, \mathrm{Col}_g\rangle$$

Donc $$\langle \mathrm{Col}_k, \mathrm{Col}_g\rangle = \frac{|G|}{|C|}\delta_C(k) = \begin{cases}\frac{|G|}{|C|} & \text{si } k\in C\\ 0 & \text{sinon}.\end{cases}$$