

**Exercice 1**

Soit f une fonction continue sur $[0, 1]$.

1. Montrer que $\int_0^1 t^n f(t) dt \rightarrow 0$.

On souhaite estimer la vitesse de convergence de cette suite vers 0.

2. Montrer que :

$$n \int_0^1 t^n f(t) dt = \int_0^\infty \left(1 - \frac{u}{n}\right)^n f\left(1 - \frac{u}{n}\right) \mathbb{1}_{[0, n]}(u) du.$$

3. En déduire la limite de la suite $n \int_0^1 t^n f(t) dt$.

On rappelle que si f est intégrable alors sa transformée de Fourier est la fonction :

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-i\xi x} dx.$$

Exercice 2 (Lemme de Riemann-Lebesgue)

On va montrer que si f est intégrable alors $\hat{f}(\xi) \xrightarrow{\xi \rightarrow \infty} 0$.

1. Rappeler pourquoi $\hat{f}$ est continue.
2. On commence en supposant f continue à support compact. Montrer que :

$$\hat{f}(\xi) = - \int_{\mathbb{R}} f\left(x + \frac{\pi}{\xi}\right) e^{-ix\xi} dx$$

3. En déduire que, pour $\xi \neq 0$:

$$|\hat{f}(\xi)| \leq \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \left| f(x) - f\left(x + \frac{\pi}{\xi}\right) \right| dx.$$

4. En déduire le lemme de Riemann-Lebesgue pour les fonctions continues à support compact.
5. En déduire le cas général.

L'espace de Schwartz est l'espace des fonctions $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ à décroissance rapide, c'est à dire que, l'espace des fonctions $\mathcal{C}^\infty$ tel que :

$$\forall k \geq 0, \forall N \geq 0, \quad x^N f^{(k)}(x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 0.$$

On le note $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, il est très utile quand on fait du Fourier.

Exercice 3 (Formule sommatoire de Poisson)

Le but de l'exercice est de montrer que si f est dans l'espace de Schwartz alors on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(x + 2\pi n) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n) e^{inx}.$$

En particulier,

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} f(2\pi n) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n).$$

1. Montrer que la série de fonction $\sum_{n \in \mathbb{Z}} f(x + 2\pi n)$ converge normalement sur tout compact de $\mathbb{R}$.
2. Montrer que la somme $\sum_{n \in \mathbb{Z}} f(x + 2\pi n)$ est une fonction 2π -périodique de classe $\mathcal{C}^1$.
3. En déduire la formule de Poisson.

Exercice 4

Soit X une variable aléatoire réelle positive. Montrer que :

$$\mathbb{E}(X) = \int_0^\infty \mathbb{P}(X > t) dt$$

On rappelle que la fonction Γ est la fonction suivante :

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt$$

pour $z \in \mathbb{C}$ tel que $\operatorname{Re}(z) > 0$.

Exercice 5

On va montrer que, pour tout $0 < x < 1$, on a :

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \int_0^\infty \frac{dv}{v^x(1+v)}$$

Il est important de noter qu'en fait¹ :

$$\int_0^\infty \frac{dv}{v^x(1+v)} = \frac{\pi}{\sin(\pi x)}$$

Ce qui donne la formule des compléments.

1. Écrire $\Gamma(x)\Gamma(1-x)$ comme une intégrale sur $\mathbb{R}_+^{*2}$ en t et s .
2. Faire le changement de variable $u = s + t$ et $v = \frac{t}{s}$.
3. Conclure.