

Texte 1 : La corde élastique

Présenté par

Tiphany CHENAIS & Margot TURCAN

Encadrées par

Rozenn TEXIER-PICARD & Roger LEWANDOWSKI

Sommaire :

- Plan de la présentation
- Support pour la partie I (modélisation)
- Support pour la partie II (stabilité des équilibres)
- Annexe 1 : calcul détaillé de la différentielle en Y^* dans le cas du texte (par Rozenn Texier-Picard)
- Annexe 2 : codes en Scilab et illustrations

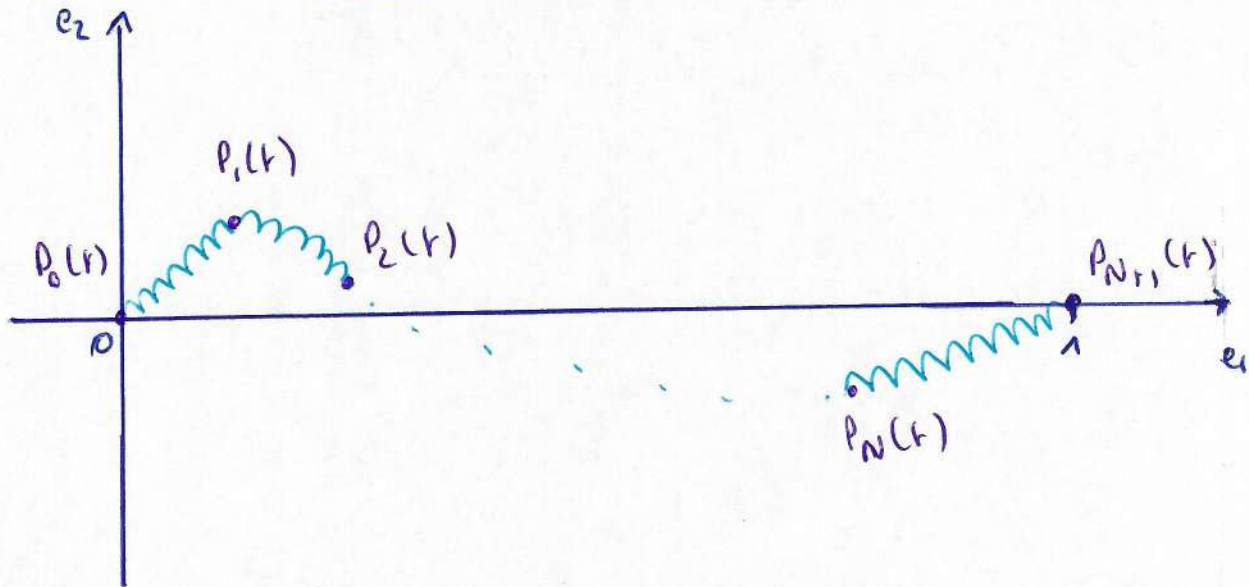
Plan de la présentation :

- I - Modélisation des problèmes du texte et du cas avec pesanteur, accroché à un bout
 - a) Présentation
 - b) Equation régissant le mouvement
 - c) Point d'équilibre

- II - Discussion de l'équilibre dans le cadre de l'apesanteur
 - a) Le calcul de la différentielle
 - b) Recherche de valeur propre pour déterminer la stabilité du système
 - c) Présentation et analyse des résultats (compression / extension)

Modèle pour un système masses/ressorts fixé aux deux bouts, soumis uniquement à la force des ressorts.

* on considère $N+1$ ressorts identiques (k est de raideur, l_0 longueur au repos) reliant N masses identiques représentées par les points P_1, P_2, \dots, P_N , P_1 relié à P_0 fixé en $(0,0)$ et P_N relié à P_{N+1} fixé en $(1,0)$



* bilan des forces en chaque point et pfd :

$$m \frac{d^2 P_i}{dt^2}(t) = f_{i,i-1} + f_{i,i+1}$$

$$\text{à } \forall i \in \llbracket 1, N \rrbracket, \quad f_{i,i-1} = \frac{k}{l_0} \left(\|P_i(t) - P_{i-1}(t)\| - l_0 \right) \frac{P_{i-1}(t) - P_i(t)}{\|P_{i-1}(t) - P_i(t)\|}$$

$$f_{i,i+1} = \frac{k}{l_0} \left(\|P_i(t) - P_{i+1}(t)\| - l_0 \right) \frac{P_{i+1}(t) - P_i(t)}{\|P_{i+1}(t) - P_i(t)\|}$$

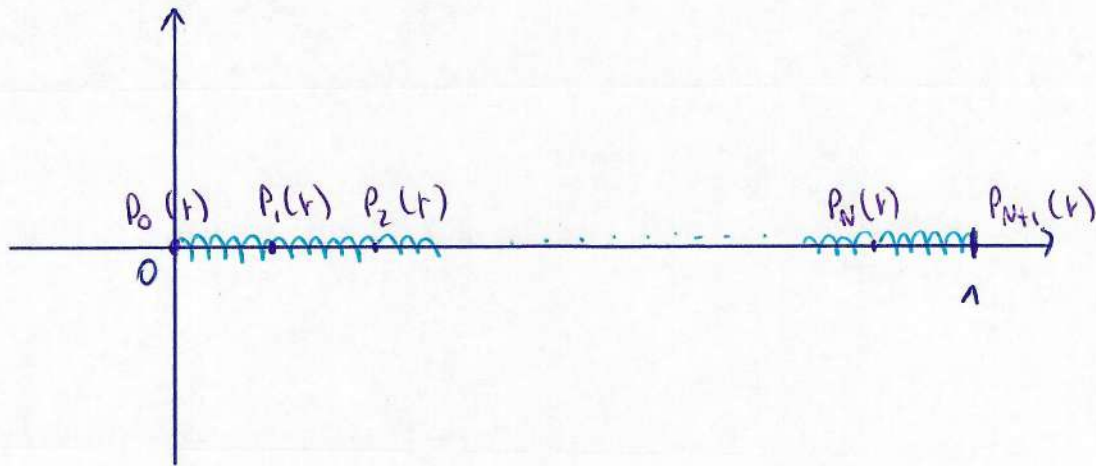
* $F: \mathcal{H}_{4 \times N}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{H}_{4,N}(\mathbb{R})$ tq

$$F(y(t)) = \begin{cases} F(y(t))_{1,i} = (y(t))_{3,i} & F(y(t))_{2,i} = (y(t))_{4,i} \\ F(y(t))_{3,i} = \frac{k}{ml_0} \left((m_i^-(y) - l_0) \frac{y_{i-1}(t) - y_i(t)}{m_i^-(y)} + (m_i^+(y) - l_0) \frac{y_{i+1}(t) - y_i(t)}{m_i^+(y)} \right) \\ F(y(t))_{4,i} = \frac{k}{ml_0} \left((m_i^-(y) - l_0) \frac{y_{i-1}(t) - y_{2,i}(t)}{m_i^-(y)} + (m_i^+(y) - l_0) \frac{y_{i+1}(t) - y_{2,i}(t)}{m_i^+(y)} \right) \end{cases}$$

Alors l'équation du mouvement vérifiée par le système de points $(p_1(t), \dots, p_N(t))$ est : $\frac{dY}{dt}(t) = F(Y(t))$

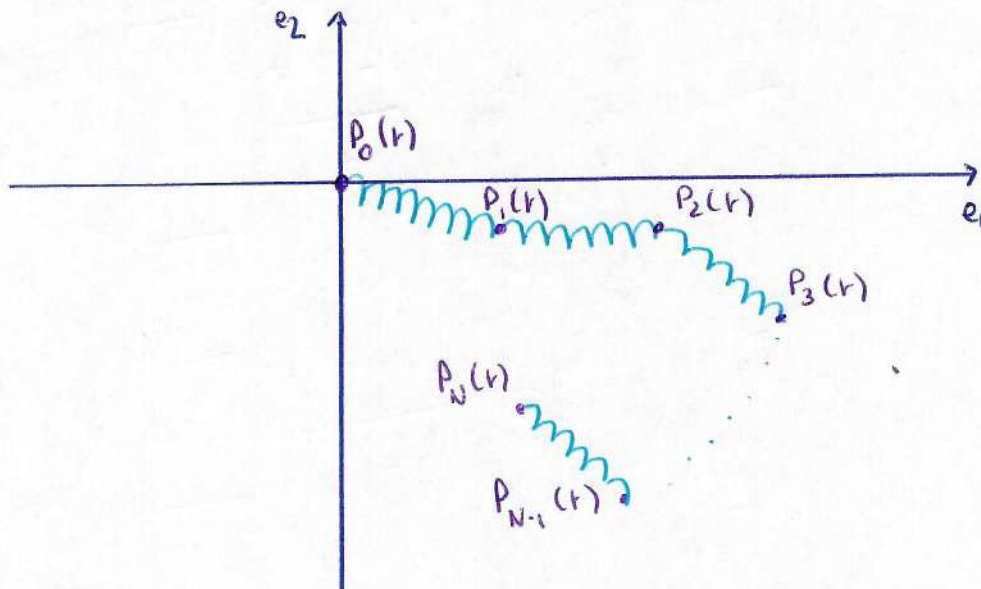
* F localement lipschitzienne en $Y \in \mathbb{R}^{4,N}(\mathbb{R})$, donc $\forall (t_0, Y_0) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^{4,N}(\mathbb{R})$
 $\exists t^* \in \mathbb{R}_+$ tq le problème $\begin{cases} \frac{dY}{dt}(t) = F(Y(t)) \\ Y(t_0) = Y_0 \end{cases}$ admette une unique solution sur $[0, t^*[$.

* point à l'équilibre : $Y^* = \begin{pmatrix} \frac{1}{N+1} & \frac{2}{N+1} & \dots & \frac{N}{N+1} \\ 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$
 $(F(Y^*) = 0_{\mathbb{R}^{4,N}} \text{ ok})$



Modèle par un système masses/ressorts soumis à la pesanteur et fixé à une seule extrémité.

on considère N ressorts identiques (k est de raideur, l_0 longueur au repos)
 reliant N masses identiques représentées par les points
 P_1, P_2, \dots, P_N , P_1 relié à P_0 fixé en $(0,0)$.



bilan global des forces :

• en $P_N(t)$: * le poids $\vec{P} = m\vec{g} = -mg\vec{e}_2$

* la force exercée par le ressort le reliant à $P_{N-1}(t)$:

$$\vec{f}_{N,N-1} = \frac{k}{l_0} \left(\|P_N(t) - P_{N-1}(t)\| - l_0 \right) \frac{P_{N-1}(t) - P_N(t)}{\|P_{N-1}(t) - P_N(t)\|}$$

• en $P_i(t)$, $i \in \llbracket 1, N-1 \rrbracket$: * le poids $\vec{P} = m\vec{g}$

* la force du ressort le reliant à $P_{i-1}(t)$

$$\vec{f}_{i,i-1} = \frac{k}{l_0} \left(\|P_i(t) - P_{i-1}(t)\| - l_0 \right) \frac{P_{i-1}(t) - P_i(t)}{\|P_{i-1}(t) - P_i(t)\|}$$

* la force du ressort le reliant à $P_{i+1}(t)$

$$\vec{f}_{i,i+1} = \frac{k}{l_0} \left(\|P_i(t) - P_{i+1}(t)\| - l_0 \right) \frac{P_{i+1}(t) - P_i(t)}{\|P_{i+1}(t) - P_i(t)\|}$$

rq • $\vec{f}_{i,i+1} = -\vec{f}_{i+1,i} \quad \forall i \in \llbracket 1, N-1 \rrbracket$

• posons $\vec{f}_{N,N+1} = \vec{0}$

* principe fondamental de la dynamique / 2^{ème} loi de Newton :

aux points $i \in \llbracket 1, N \rrbracket$, $m \frac{d^2 \rho}{dt^2}(t) = f_{i,i-1} + f_{i,i+1} + P$

* on introduit :

$$Y(t) = \begin{pmatrix} P_1(t) \cdot \vec{e}_1 \\ P_1(t) \cdot \vec{e}_2 \\ \vdots \\ \frac{dP_1(t)}{dt} \cdot \vec{e}_1 \\ \vdots \\ \frac{dP_1(t)}{dt} \cdot \vec{e}_2 \\ \vdots \\ P_N(t) \cdot \vec{e}_1 \\ P_N(t) \cdot \vec{e}_2 \\ \vdots \\ \frac{dP_N(t)}{dt} \cdot \vec{e}_1 \\ \vdots \\ \frac{dP_N(t)}{dt} \cdot \vec{e}_2 \end{pmatrix}$$

//

$(Y_{j,i}(t))_{\substack{1 \leq j \leq 4 \\ 1 \leq i \leq N}}$

et $\tilde{F} : \mathcal{H}_{4,N}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{H}_{4,N}(\mathbb{R})$

$$\tilde{F}(Y(t)) \text{ tq } \begin{cases} (\tilde{F}(Y(t)))_{1,i} = (Y(t))_{3,i} \\ (\tilde{F}(Y(t)))_{2,i} = (Y(t))_{4,i} \\ (\tilde{F}(Y(t)))_{3,i} = \frac{k}{m l_0} \left[(m_i^-(Y) - l_0) \frac{Y_{1,i-1} - Y_{1,i}}{m_i^-(Y)} + (m_i^+(Y) - l_0) \frac{Y_{1,i+1} - Y_{1,i}}{m_i^+(Y)} \right] \\ (\tilde{F}(Y(t)))_{4,i} = \frac{k}{m l_0} \left[(m_i^-(Y) - l_0) \frac{Y_{2,i-1} - Y_{2,i}}{m_i^-(Y)} + (m_i^+(Y) - l_0) \frac{Y_{2,i+1} - Y_{2,i}}{m_i^+(Y)} \right] - mg \end{cases}$$

avec $m_i^\pm(Y) = \sqrt{(Y_{1,i \pm 1} - Y_{1,i})^2 + (Y_{2,i \pm 1} - Y_{2,i})^2}$

$\left. \begin{aligned} m_N^+(Y) &= l_0 \\ (Y_{1,0}, Y_{2,0}) &= (0, 0) \end{aligned} \right\} \text{ par convention.}$

Alors l'équation du mouvement vérifiée par le système de points $(P_1(t), \dots, P_N(t))$ est

$$\frac{dY}{dt}(t) = \tilde{F}(Y(t))$$

* \tilde{F} est \mathcal{C}^1 , donc en particulier localement lipschitzienne en $Y \in \mathcal{H}_{4,N}(\mathbb{R})$. Pour tout $(t_0, Y_0) \in \mathbb{R}^+ \times \mathcal{H}_{4,N}(\mathbb{R})$, le problème

$$\begin{cases} \frac{dY}{dt}(t) = \tilde{F}(Y(t)) \\ Y(t_0) = Y_0 \end{cases} \quad \text{a une unique solution locale.}$$

(en effet, à tout instant t , $P_i(t) \neq P_{i+1}(t) \quad \forall i \in \llbracket 0, N \rrbracket$)
 \Rightarrow il existe $\tilde{T} \in \mathbb{R}^+$ tq le problème admette une unique solution sur $[0, \tilde{T}]$.

* point à l'équilibre :
 de la forme :

$$\tilde{Y} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ y_{2,1}^* & \dots & y_{2,N}^* \\ 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Vérifions :

$$\tilde{F}(\tilde{Y})_{1,i} = \tilde{Y}_{3,i} = 0 \quad \text{OK}$$

$$\tilde{F}(\tilde{Y})_{2,i} = \tilde{Y}_{4,i} = 0 \quad \text{OK}$$

$$\tilde{F}(\tilde{Y})_{3,i} = \frac{k}{m l_0} \left[(m_i^-(\tilde{Y}) - l_0) \frac{\tilde{y}_{1,i-1} - \tilde{y}_{1,i}}{m_i^-(\tilde{Y})} + (m_i^+(\tilde{Y}) - l_0) \frac{\tilde{y}_{1,i+1} - \tilde{y}_{1,i}}{m_i^+(\tilde{Y})} \right]$$

= 0

OK

il reste à définir $\tilde{Y}_{2,i}$ tq $\tilde{F}(\tilde{Y})_{4,i} = 0$.
 on les suppose $\tilde{y}_{2,i} > \tilde{y}_{2,i+1}$.
 tout d'abord, notons que

$$\left\{ \begin{array}{l} m_i^-(\tilde{Y}^*) = \tilde{y}_{2,i-1} - \tilde{y}_{2,i} \quad i \in \llbracket 2, N \rrbracket \\ m_i^+(\tilde{Y}^*) = \tilde{y}_{2,i} - \tilde{y}_{2,i+1} \quad i \in \llbracket 1, N-1 \rrbracket \\ m_1^-(\tilde{Y}^*) = -\tilde{y}_{2,1} \\ m_N^+(\tilde{Y}^*) = 0 \end{array} \right.$$

et donc $m_i^+(\tilde{Y}) = m_{i+1}^-(\tilde{Y})$

$$\begin{cases} \tilde{F}(\tilde{Y})_{4,i} = 0 \\ \forall i \in \llbracket 1, N \rrbracket \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{k}{m l_0} \left[(m_i^-(\tilde{Y}) - l_0) - (m_i^+(\tilde{Y}) - l_0) \right] = mg \\ \frac{k}{m l_0} [m_N^-(\tilde{Y}) - l_0] = mg \end{cases} \quad \forall i \in \llbracket 1, N-1 \rrbracket$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m_N^-(\tilde{Y}) = \frac{m^2 g l_0}{k} + l_0 \\ m_i^-(\tilde{Y}) = \frac{m^2 g l_0}{k} + m_{i+1}^-(Y^*) \end{cases} \quad \forall i \in \llbracket 1, N-1 \rrbracket$$

$$\Leftrightarrow m_i^-(\tilde{Y}) = l_0 + (N-i+1) \frac{m^2 g l_0}{k} \quad \forall i \in \llbracket 1, N \rrbracket$$

$$\Leftrightarrow \tilde{Y}_{2,i} = -i \left(l_0 + \left(N - \frac{i-1}{2} \right) \frac{m^2 g l_0}{k} \right) \quad \forall i \in \llbracket 1, N \rrbracket$$

\hat{Y} défini ainsi vérifie bien $\hat{F}(\hat{Y}) = 0_{\mathcal{H}_{4,N}}$.

II - Discussion de l'équilibre dans le cadre de l'apesanteur

a) Le calcul de différentielle.

Une fois le point d'équilibre obtenu, on va étudier la stabilité asymptotique de ce point. Pour cela, on va calculer la différentielle de l'application F au point Y^* .

Donc calculons $F(Y^* + H)$ et effectuons un DL 1.

Dans le cas avec pesanteur, il est difficile de calculer la différentielle principalement $(D\tilde{F}(\tilde{Y})H)_{3,i}$ puisque aucun des termes ne se simplifie. C'est pourquoi nous étudierons en détail le cas sans pesanteur.

Retour à la différentielle : calcul fastidieux

En résumé, on note $f_i^\pm(Y) = \frac{n_i^\pm(Y) - l_0}{m l_0}$

voir
annexe 1

→ calcul de la diff de n_i^\pm au point Y .

→ on l'évalue en Y^* (point d'équilibre)

→ m même chose avec f_i^\pm

Puis on en conclue que

$$\begin{cases} (DF(Y^*)H)_{1,i} = H_{3,i} ; (DF(Y^*)H)_{2,i} = H_{4,i} \\ (DF(Y^*)H)_{3,i} = \frac{k}{m l_0} (H_{1,i-1} - 2H_{1,i} + H_{1,i+1}) \\ (DF(Y^*)H)_{4,i} = \frac{k}{m l_0} [1 - (N+1)l_0] (H_{1,i-1} - 2H_{2,i} + H_{2,i+1}) \end{cases}$$

$$H_{1,0} = H_{2,0} = H_{1,N+1} = H_{2,N+1} = 0$$

b) Recherche de valeur propre: pour déterminer la stabilité du système.

Soit λ une valeur propre de $DF(Y^*)$ satisfaisant:

$$\begin{cases} H_{3,i} = \lambda H_{4,i} & ; & H_{4,i} = \lambda H_{2,i} \\ \frac{k}{m l_0} (H_{1,i-1} - 2H_{1,i} + H_{1,i+1}) = \lambda H_{3,i} \\ \frac{k}{m l_0} [1 - (N+1)l_0] (H_{2,i-1} - 2H_{2,i} + H_{2,i+1}) = \lambda H_{4,i} \end{cases}$$

Le système se découple en deux systèmes.

$$(1) \begin{cases} H_{3,i} = \lambda H_{4,i} \\ \frac{k}{m l_0} \underbrace{(H_{1,i-1} - 2H_{1,i} + H_{1,i+1})}_{(*)} = \lambda^2 H_{1,i} \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} H_{4,i} = \lambda H_{2,i} \\ \frac{k}{m l_0} [1 - (N+1)l_0] (H_{2,i-1} - 2H_{2,i} + H_{2,i+1}) = \lambda^2 H_{2,i} \end{cases}$$

(*) \Leftrightarrow matriciellement:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} -2 & 1 & & & \\ & 1 & -2 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 & -2 \\ & & & & & 1 & -2 \end{pmatrix}}_A \underbrace{\begin{pmatrix} H_{1,1} \\ \vdots \\ H_{1,N} \end{pmatrix}}_{H_1} = \begin{pmatrix} -2H_{1,1} + H_{1,2} \\ H_{1,1} - 2H_{1,2} + H_{1,3} \\ \vdots \\ H_{1,N-1} - 2H_{1,N} \end{pmatrix}$$

Donc (1) $\Leftrightarrow \frac{k}{m l_0} A H_1 = \lambda^2 H_1$

(2) $\Leftrightarrow \frac{k}{m l_0} [1 - (N+1)l_0] A H_2 = \lambda^2 H_2$

Grâce à une commande sur Scilab, on peut remarquer que toutes les valeurs propres sont négatives et distinctes
 autre méthode classique: voir Allaire - Kébir p86-87.
 → Les valeurs propres sont imaginaires pures pour (2)

→ $\forall i \quad 1 - (N+1)l_0 > 0$, (2) sont imaginaires pures

$\forall i \quad 1 - (N+1)l_0 < 0$, (2) sont strictement négatif et positif.

Théorème de Stabilité des équilibres dans le cas non linéaire

L, ne pas oublier de le noter pour mqp nous connaissons bien nos cours

voir page 16 ↙ "Equations différentielle : analyse qualitative et approximation numérique"
Notes de cours.

Donc lorsque $1 - (N+1)l_0 > 0$ on ne peut rien en conclure.

Si non dans l'autre cas l'équilibre est instable.

c) présentation et analyse des résultats (compression/extension)

$1 - (N+1)l_0$ revient à regarder $1 - e$ où e est l'étirement (ie longueur total des ressorts mis bout à bout)

On va utiliser, la méthode de Runge Kutta d'ordre 4 puisque cette dernière permet d'approximer une solution d'un système d'équation différentielles ordinaire non linéaire

Ici on va faire varier $e = \text{étirement}$

• $\forall i \quad 1 - e > 0$ alors on est ^{dans} le cas d'extension.

on peut voir que le système est instable [ce qui est cohérent car cela correspond à l'instabilité des directions transversales]

• $\forall i \quad 1 - e < 0$ alors on est dans le cas d'une compression.

On remarque sur la figure que nous ne pouvons rien en tirer sur cet équilibre → c'est le cas.

Si on se place dans le cas où Y^* est en extension on considère le système suivant:

$$\begin{cases} \frac{dH}{dt}(t) = DF(Y^*) H(t) \\ H(0) = H_0 \end{cases}$$

$$\text{Solution } H(t) = e^{tDF(Y^*)} H_0$$

D'après les \neq cas précédents et que les valeurs propres sont distinctes. La solution générale est une combinaison linéaire d'oscillation harmonique d'axe au fréquence

$\sqrt{\frac{k\mu_j}{m\ell_0}}$ et d'oscillations harmoniques transverses avec

fréquences $\sqrt{\frac{k[1-(N+1)\ell_0]\mu_j}{m\ell_0}}$

En conclusion, le système passe par le point d'équilibre* il entre dans un comportement oscillateur régulier

↳ il ne reste jamais dans le bassin d'attraction

La corde élastique

Calcul de la différentielle de F en Y^* .

On s'intéresse au DL1 de $F(Y^*+H)_{3,i}$ et $F(Y^*+H)_{4,i}$.

Pour alléger les notations, on introduit

$$f_i^-(Y) = \frac{m_i^-(Y) - l_0}{m_i^-(Y)}, \quad f_i^+(Y) = \frac{m_i^+(Y) - l_0}{m_i^+(Y)}$$

On a alors:

$$F(Y)_{3,i} = \frac{k}{mb} \left[f_i^-(Y) (Y_{1,i-1} - Y_{1,i}) + f_i^+(Y) (Y_{1,i+1} - Y_{1,i}) \right].$$

$$F(Y)_{4,i} = \frac{k}{mb} \left[f_i^-(Y) (Y_{2,i-1} - Y_{2,i}) + f_i^+(Y) (Y_{2,i+1} - Y_{2,i}) \right].$$

Remarquons que

$$\begin{aligned} m_i^-(Y+H) &= \left[(Y_{1,i-1} + H_{1,i-1} - Y_{1,i} - H_{1,i})^2 + (Y_{2,i-1} + H_{2,i-1} - Y_{2,i} - H_{2,i})^2 \right]^{\frac{1}{2}} \\ &= \left[(Y_{1,i-1} - Y_{1,i})^2 + (Y_{2,i-1} - Y_{2,i})^2 + 2(Y_{1,i-1} - Y_{1,i})(H_{1,i-1} - H_{1,i}) \right. \\ &\quad \left. + 2(Y_{2,i-1} - Y_{2,i})(H_{2,i-1} - H_{2,i}) + o(H) \right]^{\frac{1}{2}} \\ &= m_i^-(Y) \left[1 + \frac{2(Y_{1,i-1} - Y_{1,i})(H_{1,i-1} - H_{1,i}) + 2(Y_{2,i-1} - Y_{2,i})(H_{2,i-1} - H_{2,i})}{m_i^-(Y)^2} + o(H) \right]^{\frac{1}{2}} \\ &= m_i^-(Y) \left[1 + \frac{(Y_{1,i-1} - Y_{1,i})(H_{1,i-1} - H_{1,i}) + (Y_{2,i-1} - Y_{2,i})(H_{2,i-1} - H_{2,i})}{m_i^-(Y)^2} + o(H) \right] \end{aligned}$$

$$\text{D'où } Dm_i^-(Y) \cdot H = \frac{(Y_{1,i-1} - Y_{1,i})(H_{1,i-1} - H_{1,i}) + (Y_{2,i-1} - Y_{2,i})(H_{2,i-1} - H_{2,i})}{m_i^-(Y)}$$

En particulier au point Y^* on obtient

$$\underline{Dm_i^-(Y^*) \cdot H = -H_{1,i-1} + H_{1,i}}. \quad \text{De même, } \underline{Dm_i^+(Y^*) \cdot H = H_{1,i+1} - H_{1,i}}$$

Calculons maintenant la différentielle de f_i^- en y^* .

$$\text{On a: } f_i^-(y) = 1 - \frac{l_0}{n_i^-(y)}$$

$$f_i^-(y^*+H) - f_i^-(y^*) = \frac{-l_0}{n_i^-(y^*)} \left[\frac{n_i^-(y^*)}{n_i^-(y^*) + Dn_i^-(y^*) \cdot H + o(H)} - 1 \right]$$

$$= \frac{-l_0}{n_i^-(y^*)} \left[1 - \frac{Dn_i^-(y^*) \cdot H + o(H)}{n_i^-(y^*)} - 1 \right]$$

$$= \frac{l_0}{n_i^-(y^*)^2} Dn_i^-(y^*) \cdot H + o(H)$$

$$= \frac{l_0}{n_i^-(y^*)^2} (-H_{1,i-1} + H_{1,i}) + o(H).$$

$$\text{Donc } Df_i^-(y^*) \cdot H = \frac{-l_0}{n_i^-(y^*)^2} (H_{1,i-1} - H_{1,i}) = -l_0(N+1)^2 (H_{1,i-1} - H_{1,i})$$

$$\text{De même, } Df_i^+(y^*) \cdot H = l_0(N+1)^2 (H_{1,i+1} - H_{1,i}).$$

Finalement, on obtient

$$F(y^*+H)_{3,i} - F(y^*)_{3,i} = \frac{k}{ml_0} \left[Df_i^-(y^*) \cdot H [y_{1,i-1}^* - y_{1,i}^*] + f_i^-(y^*) (H_{1,i-1} - H_{1,i}) \right. \\ \left. + Df_i^+(y^*) \cdot H [y_{1,i+1}^* - y_{1,i}^*] + f_i^+(y^*) (H_{1,i+1} - H_{1,i}) \right] \\ + o(H)$$

$$\text{Donc } (DF(y^*)H)_{3,i} = \frac{k}{ml_0} \left[-l_0(N+1)^2 (H_{1,i-1} - H_{1,i}) \left(\frac{-1}{N+1} \right) + (1 - (N+1)l_0) (H_{1,i-1} - H_{1,i}) \right. \\ \left. + l_0(N+1)^2 (H_{1,i+1} - H_{1,i}) \left(\frac{1}{N+1} \right) + (1 - (N+1)l_0) (H_{1,i+1} - H_{1,i}) \right] \\ = \frac{k}{ml_0} \left[(H_{1,i-1} - H_{1,i}) + (H_{1,i+1} - H_{1,i}) \right]$$

De même, en développant comme ci-dessus

$$F(y^*+H)_{4,i} - F(y^*)_{4,i}$$

et en utilisant le fait que $y_{2,i-1}^x - y_{2,i}^k = y_{2,i+1}^k - y_{2,i}^k = 0$
il vient

$$(DF(y^*)H)_{4,i} = \frac{k}{m l_0} \left[(1 - (N+1)l_0) (H_{2,i-1} - 2H_{2,i} + H_{2,i+1}) \right]$$

Annexe 2 : codes en Scilab

- Cas du texte, sans pesanteur, accroché aux deux bouts

//création de Y0

```
function Y0=igrec(N, x1, x2, v1, v2)
    Y0=[]
    for i=1:N
        x=i/(N+1)
        Y0=[Y0,[x1(x);x2(x);v1(x);v2(x)]]
    end
endfunction
```

// cas 1) du texte pour la position de départ

```
function y=x1(x)
    y=x
endfunction
```

```
function y=x2(x)
    y=0
endfunction
```

```
function y=v1(x)
    y=0
endfunction
```

```
function y=v2(x)
    if x<0.5 then y=0.25-4*(0.25-x)^2
    else y=0
    end
endfunction
```

```
k=10
N=10
m=0.2
l0=e/(N+1)

nb=3200
h=0.001
```

```
Y0=igrec(N,x1,x2,v1,v2)
```

```
function M=F(A, k, m, l0)
    n=(size(A))(2)
    s=k/(m*l0)
    M=zeros(4,n)
    M(1,:)=A(3,:)
    M(2,:)=A(4,:)
    n0plus=sqrt((A(1,2)-A(1,1))^2+(A(2,2)-A(2,1))^2)
    n0moins=sqrt((A(1,1))^2+(A(2,1))^2)
    M(3,1)=s*((n0moins-l0)*(-A(1,1))/n0moins+(n0plus-l0)*(A(1,2)-A(1,1))/n0plus)
    M(4,1)=s*((n0moins-l0)*(A(2,1))/n0moins+(n0plus-l0)*(A(2,2)-A(2,1))/n0plus)
    nnplus=sqrt((1-A(1,n))^2+(A(2,n))^2)
    nnmoins=sqrt((A(1,n-1)-A(1,n))^2+(A(2,n-1)-A(2,n))^2)
    M(3,n)=s*((nnmoins-l0)*(A(1,n-1)-A(1,n))/nnmoins+(nnplus-l0)*(1-A(1,n))/nnplus)
    M(4,n)=s*((nnmoins-l0)*(A(2,n-1)-A(2,n))/nnmoins+(nnplus-l0)*(-A(2,n))/nnplus)
    for i=2:(n-1)
        niplus=sqrt((A(1,i+1)-A(1,i))^2+(A(2,i+1)-A(2,i))^2)
        nimoins=sqrt((A(1,i-1)-A(1,i))^2+(A(2,i-1)-A(2,i))^2)
        M(3,i)=k*((nimoins-l0)*(A(1,i-1)-A(1,i))/nimoins+(niplus-l0)*(A(1,i+1)-A(1,i))/niplus)/(m*l0)
        M(4,i)=k*((nimoins-l0)*(A(2,i-1)-A(2,i))/nimoins+(niplus-l0)*(A(2,i+1)-A(2,i))/niplus)/(m*l0)
    end
endfunction
```

```

function Y=f(X)
    Y=F(X,k,m,l0)
endfunction

function Y=rk4(f, Y0, h, nb)
    k1=f(Y0)
    k2=f(Y0+h*k1/2)
    k3=f(Y0+h*k2/2)
    k4=f(Y0+h*k3)
    Y=Y0+h*(k1+2*k2+2*k3+k4)/6
    for i=1:nb
        k1=f(Y)
        k2=f(Y+h*k1/2)
        k3=f(Y+h*k2/2)
        k4=f(Y+h*k3)
        Y=Y+h*(k1+2*k2+2*k3+k4)/6
        if modulo(i,160)==0 then plot([0,Y(1,:),1],[0,Y(2,:),0])
        end
    end
endfunction

```

- En extension :

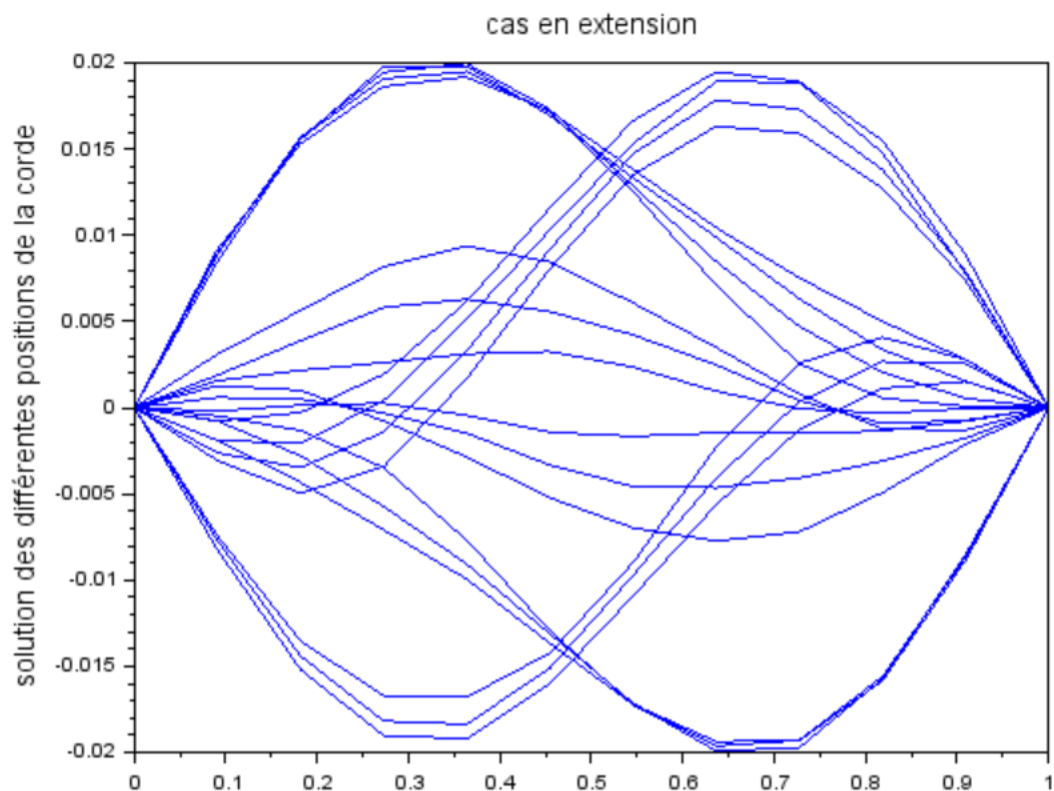
e=0.5

YN=rk4(f,Y0,h,nb)

```

plot([0,YN(1,:),1],[0,YN(2,:),0])
title('cas en extension',...
    'fontsize',3)
ylabel('solution des différentes positions de la corde','fontsize',3)

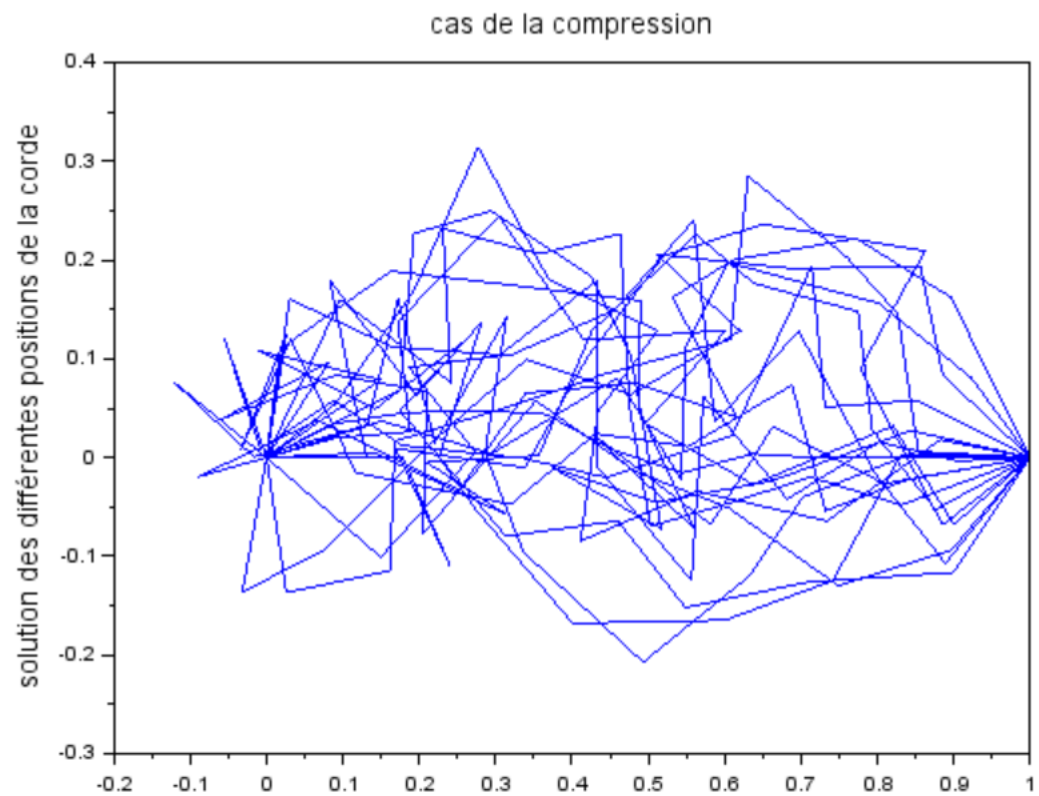
```



- En compression :

e=1.5

```
plot([0,YN(1,:),1],[0,YN(2,:),0])  
title('cas de la compression',...  
      'fontsize',3)  
ylabel('solution des différentes positions de la corde','fontsize',3)
```

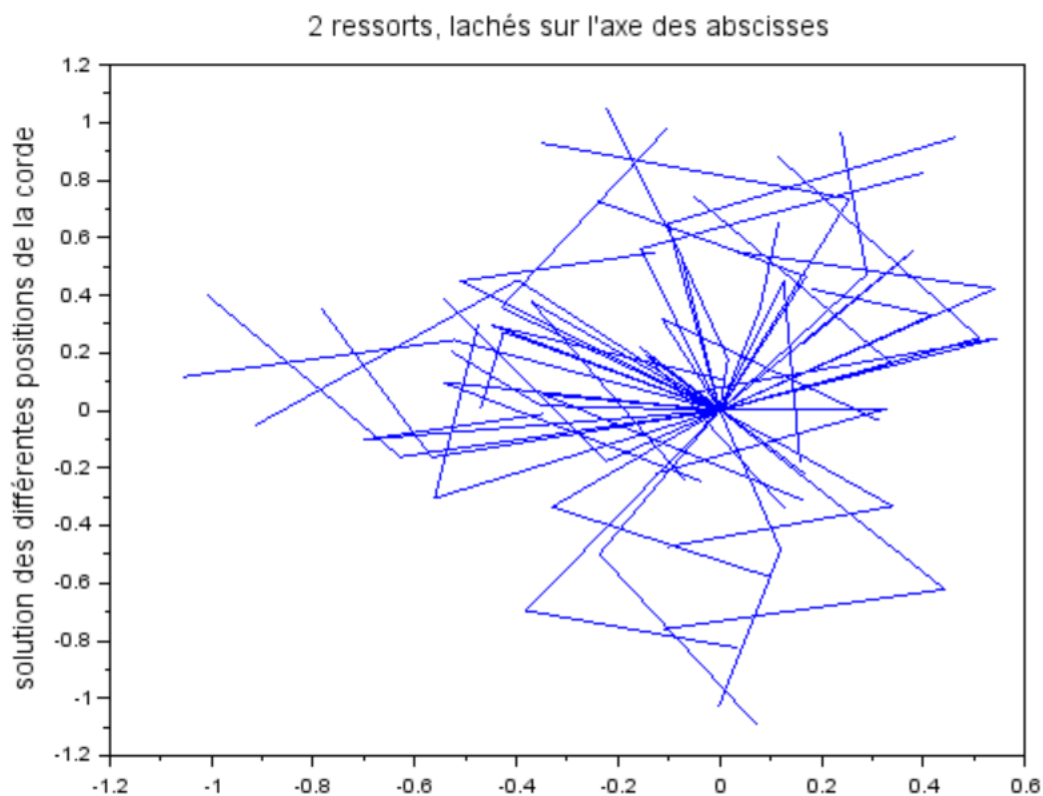


- Cas avec pesanteur, accroché à un seul bout

```
function M=F(A, k, m, l0)
n=(size(A))(2)
s=k/(m*l0)
M=zeros(4,n)
M(1,:)=A(3,:)
M(2,:)=A(4,:)-m*9,81
n0plus=sqrt((A(1,2)-A(1,1))^2+(A(2,2)-A(2,1))^2)
n0moins=sqrt((A(1,1))^2+(A(2,1))^2)
M(3,1)=s*((n0moins-l0)*(A(1,1))/n0moins+(n0plus-l0)*(A(1,2)-A(1,1))/n0plus)
M(4,1)=s*((n0moins-l0)*(-A(2,1))/n0moins+(n0plus-l0)*(A(2,2)-A(2,1))/n0plus)
nnmoins=sqrt((A(1,n-1)-A(1,n))^2+(A(2,n-1)-A(2,n))^2)
M(3,n)=s*((nnmoins-l0)*(A(1,n-1)-A(1,n))/nnmoins)
M(4,n)=s*((nnmoins-l0)*(A(2,n-1)-A(2,n))/nnmoins)
for i=2:(n-1)
niplus=sqrt((A(1,i+1)-A(1,i))^2+(A(2,i+1)-A(2,i))^2)
nimoins=sqrt((A(1,i-1)-A(1,i))^2+(A(2,i-1)-A(2,i))^2)
M(3,i)=k*((nimoins-l0)*(A(1,i-1)-A(1,i))/nimoins+(niplus-l0)*(A(1,i+1)-A(1,i))/niplus)/(m*l0)
M(4,i)=k*((nimoins-l0)*(A(2,i-1)-A(2,i))/nimoins+(niplus-l0)*(A(2,i+1)-A(2,i))/niplus)/(m*l0)
end
endfunction
```

- Position de départ identique aux cas précédents

```
N=2
k=10
e=1.5
m=0.2
YN=rk4(f,Y0,h,nb)
plot([0,YN(1,:)],[0,YN(2,:)])
title('2 ressorts, lâchés sur l\'axe des abscisses', ...
'fontsize',3)
ylabel('solution des différentes positions de la corde','fontsize',3)
```



- Position de départ proche du point d'équilibre \tilde{Y} , sans vitesse initiale

```
function y=x1(x)
    y=x*10^(-2)
endfunction
```

```
function y=x2(x)
    y=-x
endfunction
```

```
function y=v1(x)
    y=0
endfunction
```

```
function y=v2(x)
    y=0
endfunction
```

```
YN=rk4(f,Y0,h,nb)
plot([0,YN(1,:)], [0,YN(2,:)])
title('10 ressorts, lâché proche de l''axe des ordonnées', ...
      'fontsize',3)
ylabel('solution des différentes positions de la corde','fontsize',3)
```

