TP 10 – Différences finies pour les problèmes elliptiques et paraboliques en dimension 1

28 mars 2023

Théorie. On considère l'équation de la chaleur en dimension 1 :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}(t,x) - d\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x) = f(t,x) \quad (x \in [0,1],\, t > 0), \\ u(0,x) = u_0(x) \quad (x \in [0,1]), \\ u(t,0) = u(t,1) = 0 \quad (t > 0), \end{cases} \tag{$*$}$$

où $d > 0$ est une constante (coefficient de diffusion) et $u_0(\cdot)$ et $f(\cdot,\cdot)$ des fonctions données.

Exemple de modèle. Ce problème permet typiquement de modéliser l'évolution de la température u dans un barreau métallique soumis à une source de chaleur f qui varie en temps et en espace, et dont les extrémités sont maintenues à température constante $u = 0$.

But du TP. *Il s'agit de mettre en œuvre une méthode de différences finies pour l'approximation des solutions du problème* $(*)$*. Étant donnés un temps d'observation* $T > 0$*, des pas d'espace et de temps* $\Delta x = 1/J$ *et* $\Delta t = T/N$*, on construit les subdivisions* $x_j = j\Delta x$ $(j = 0, \ldots, J)$ *et* $t^n = n\Delta t$ $(n = 0, \ldots, N)$*. On notera* u_j^n *une approximation de* $u(x_j, t^n)$*.*

Mise en œuvre.

- ◇ **Équation de Laplace :** on suppose ici que f ne dépend que de x, et on s'intéresse aux solutions stationnaires de $(*)$, i.e. ne dépendant pas du temps. En approchant les dérivées par des taux d'accroissement sur la grille des x_j, on obtient le schéma suivant

$$u_0 = u_J = 0 \quad \text{et, pour } j = 1, \ldots, J-1,\ d(-u_{j-1} + 2u_j - u_{j+1}) = \Delta x^2 f(x_j). \tag{1}$$

  Il s'agit du système linéaire $dAU = F$, avec des notations que l'on précisera. Programmer cette méthode de différences finies, et la tester pour différentes valeurs de d et différentes fonctions F. Interpréter physiquement les courbes obtenues.

- ◇ **Équation de la chaleur :** après semi-discrétisation en espace par la méthode précédente, il s'agit d'utiliser une méthode de résolution des EDO pour la partie en temps. Les méthodes d'Euler explicite et implicite fournissent les schémas

$$U^{n+1} = U^n - d\Delta t\ AU^n + \Delta t\ F. \tag{Expl}$$

$$U^{n+1} = U^n - d\Delta t\ AU^{n+1} + \Delta t\ F. \tag{Impl}$$

  Tester les deux schémas précédents. On pourra prendre comme donnée initiale la fonction définie par

$$u_0(x) = \sin(\pi x) + \frac{1}{2}\sin(5\pi x)$$

  et pour terme source la fonction définie par $f(x) = 100\sin(5\pi x)$.
  Faire varier la valeur du nombre $\alpha = d\Delta t/\Delta x^2$. Qu'observe-t-on sur chacun des schémas ? Peut-on le retrouver analytiquement ?

Prolongements. Quelques pistes pour aller plus loin

- Reprendre le même travail en remplaçant les conditions au bord de Dirichlet par des conditions de Neumann homogènes :
$$\frac{\partial u}{\partial x}(t,0) = \frac{\partial u}{\partial x}(t,1) = 0 \quad (t > 0)$$
ou des conditions de périodicité $u(t,1) = u(t,0)$.
- Reprendre la méthode d'approximation basée sur les séries de Fourier (voir TP8) et comparer les résultats.
- Proposer une méthode de différences finies pour l'approximation de l'équation d'advection-diffusion
$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) + \frac{\partial}{\partial x}(au)(t,x) - d\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x) = 0.$$
avec conditions de Dirichlet homogènes. Quel nombre joue ici le rôle de α ?
- Adapter la méthode pour prendre en compte un terme source qui dépend de la solution, $f(u(t,x))$. Une telle équation peut par exemple modéliser l'évolution d'une population, $f(u)$ désignant l'accroissement `naturel` de la population. On pourra tester en particulier le modèle de Malthus ($f(u) = \lambda u$ avec $\lambda > 0$) et commenter les résultats.