

TP 10 – Différences finies pour les problèmes elliptiques et paraboliques en dimension 1

28 mars 2023

Théorie. On considère l'équation de la chaleur en dimension 1 :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(t, x) - d \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x) = f(t, x) & (x \in [0, 1], t > 0), \\ u(0, x) = u_0(x) & (x \in [0, 1]), \\ u(t, 0) = u(t, 1) = 0 & (t > 0), \end{cases} \quad (*)$$

où $d > 0$ est une constante (coefficient de diffusion) et $u_0(\cdot)$ et $f(\cdot, \cdot)$ des fonctions données.

Exemple de modèle. Ce problème permet typiquement de modéliser l'évolution de la température u dans un barreau métallique soumis à une source de chaleur f qui varie en temps et en espace, et dont les extrémités sont maintenues à température constante $u = 0$.

But du TP. Il s'agit de mettre en œuvre une méthode de différences finies pour l'approximation des solutions du problème (*). Étant donné un temps d'observation $T > 0$, des pas d'espace et de temps $\Delta x = 1/J$ et $\Delta t = T/N$, on construit les subdivisions $x_j = j\Delta x$ ($j = 0, \dots, J$) et $t^n = n\Delta t$ ($n = 0, \dots, N$). On notera u_j^n une approximation de $u(x_j, t^n)$.

Mise en œuvre.

- ◇ **Équation de Laplace :** on suppose ici que f ne dépend que de x , et on s'intéresse aux solutions stationnaires de (*), i.e. ne dépendant pas du temps. En approchant les dérivées par des taux d'accroissement sur la grille des x_j , on obtient le schéma suivant

$$u_0 = u_J = 0 \quad \text{et, pour } j = 1, \dots, J-1, \quad d(-u_{j-1} + 2u_j - u_{j+1}) = \Delta x^2 f(x_j). \quad (1)$$

Il s'agit du système linéaire $dAU = F$, avec des notations que l'on précisera. Programmer cette méthode de différences finies, et la tester pour différentes valeurs de d et différentes fonctions F . Interpréter physiquement les courbes obtenues.

- ◇ **Équation de la chaleur :** après semi-discrétisation en espace par la méthode précédente, il s'agit d'utiliser une méthode de résolution des EDO pour la partie en temps. Les méthodes d'Euler explicite et implicite fournissent les schémas

$$U^{n+1} = U^n - \frac{d\Delta t}{\Delta x^2} AU^n + F. \quad (\text{Expl})$$

$$U^{n+1} = U^n - \frac{d\Delta t}{\Delta x^2} AU^{n+1} + F. \quad (\text{Impl})$$

Tester les deux schémas précédents. On pourra prendre comme donnée initiale la fonction définie par

$$u_0(x) = \sin(\pi x) + \frac{1}{2} \sin(5\pi x)$$

et pour terme source la fonction définie par $f(x) = 100 \sin(5\pi x)$.

Faire varier la valeur du nombre $\alpha = d\Delta t/\Delta x^2$. Qu'observe-t-on sur chacun des schémas ? Peut-on le retrouver analytiquement ?

Prolongements. Quelques pistes pour aller plus loin

- ◇ Reprendre le même travail en remplaçant les conditions au bord de Dirichlet par des conditions de Neumann homogènes :

$$\frac{\partial u}{\partial x}(t, 0) = \frac{\partial u}{\partial x}(t, 1) = 0 \quad (t > 0)$$

ou des conditions de périodicité $u(t, 1) = u(t, 0)$.

- ◇ Reprendre la méthode d'approximation basée sur les séries de Fourier (voir TP8) et comparer les résultats.
- ◇ Proposer une méthode de différences finies pour l'approximation de l'équation d'advection-diffusion

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t, x) + \frac{\partial}{\partial x}(au)(t, x) - d \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x) = 0.$$

avec conditions de Dirichlet homogènes. Quel nombre joue ici le rôle de α ?

- ◇ Adapter la méthode pour prendre en compte un terme source $f(u(t, x))$. Une telle équation peut par exemple modéliser l'évolution d'une population, $f(u)$ désignant l'accroissement naturel de la population. On pourra tester en particulier le modèle de Malthus ($f(u) = \lambda u$ avec $\lambda > 0$) et commenter les résultats.