TP10 – Résolution numérique de l'équation des ondes

Le problème

Considérons le problème suivant : étant données deux fonctions v et w définies sur l'intervalle $[0,1]$ et soumises à certaines hypothèses de régularité, ainsi qu'une donnée f définie sur $[0,1]\times\mathbb{R}$, on recherche $u(x,t)$ solution régulière de

$$\left\{\begin{aligned} \partial_{tt}u(x,t) - c^2\partial_{xx}u(x,t) &= f(x,t) && \text{pour } 0<x<1,\ t>0,\\ u(0,t)=u(1,t) &= 0 && \text{pour } t>0,\\ u(x,0)=w(x) \quad \text{et} \quad \partial_t u(x,0) &= v(x) && \text{pour } 0<x<1. \end{aligned}\right. \tag{P}$$

Le paramètre réel $c>0$ est la vitesse des ondes dans le milieu considéré, supposée dans ce travail constante (en temps) et uniforme (en espace).

But du travail

Mettre en place, pour résoudre de façon approchée le problème (P), une méthode numérique basée sur une approximation par différences finies. Observer les propriétés de stabilité de cette méthode et faire une étude de convergence en fonction des paramètres de discrétisation.

Mise en œuvre et notations

Soit $J\in\mathbb{N}^\star$, on note alors $h=1/(J+1)$ le pas en espace et $x_j=jh$, $j=0,1,\dots,J+1$ les abscisses de discrétisation en espace. On introduit par ailleurs $\tau>0$ un pas de discrétisation en temps, et $t_n=n\tau$ avec $n\in\mathbb{N}$ les abscisses de discrétisation en temps.

Le schéma numérique considéré détermine itérativement pour des valeurs successives de n, le vecteur $U^n=(u_j^n)_{1\le j\le J}\in\mathbb{R}^J$ où, dans un certain sens, u_j^n approche la quantité $u(x_j,t_n)$. Il prend la forme suivante :

$$\left\{\begin{aligned} &U^0=W, \qquad U^1=W+\tau V+(1/2)\tau^2\left(F(0)-c^2AW\right),\\ &\frac{U^{n+1}-2U^n+U^{n-1}}{\tau^2}+c^2AU^n=F(t_n), \qquad n=1,2,\dots, \end{aligned}\right. \tag{S}$$

avec

- $W\in\mathbb{R}^J$ de composantes $w(x_j)$, pour $j=1,\dots,J$
- $V\in\mathbb{R}^J$ de composantes $v(x_j)$, pour $j=1,\dots,J$
- $F(t_n)\in\mathbb{R}^J$ de composantes $f(x_j,t_n)$, pour $j=1,\dots,J$
- $A\in\mathcal{M}_J(\mathbb{R})$ la matrice tridiagonale suivante :

$$A=\frac{1}{h^2}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0\\ -1 & 2 & \ddots & 0\\ 0 & \ddots & \ddots & -1\\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Travail à mener

- ◇ Expliquer formellement la construction du schéma.
- ◇ Mettre en place un programme de base [1] avec $c = 1$ et les données suivantes : $v(x) = 0$, $w(x) = \sin(\pi x)$ et $f(x,t) = 0$, pour lesquelles la solution exacte est connue : $u(x,t) = \cos(\pi t)\sin(\pi x)$. Comparer la solution obtenue numériquement à l'instant physique $t = 1$ avec la solution exacte à ce même instant. On pourra par exemple choisir les paramètres $J = 20$, $\tau = 0.01$ et $N = 100$.
- ◇ Tester ce même programme pour d'autres données v, w et f cette fois-ci toutes non-triviales et pour lesquelles la solution exacte demeure néanmoins connue.
- → Une fois le schéma mis en place et validé par les tests précédents, le rendre portable en l'intégrant à une fonction.
- ◇ Pratiquer quelques tests numériques en choisissant différents paramètres de discrétisation h, τ et observer le caractère instable du schéma.
- ◇ Établir numériquement la convergence du schéma à l'ordre 2 pour des paramètres satisfaisant à la condition CFL de stabilité $c\tau/h \leq 1$.
- ◇ Résoudre le problème pour les données suivantes :

  $$w(x) = \mathrm{e}^{-250(x-1/3)^2}, \qquad v(x) = 25\,\mathrm{e}^{-1000(x-2/3)^2}$$

  On représentera la solution $u(x,t)$ obtenue en 3D en fonction de x et t.

Prolongements

Quelques pistes pour aller plus loin.

- ◇ Vérifier que l'ordre de convergence est dégradé lorsque la donnée initiale discrète U^1 du schéma (S) est remplacée par $W + \tau V$ ou par W. *On prendra garde que les symétries particulières des solutions exactes et numériques considérées peuvent réduire de façon ponctuelle les erreurs numériques.*
- ◇ Mettre en place un schéma numérique pour le problème (P) avec d'autres conditions aux limites. On pourra par exemple considérer des conditions de bord mixtes Dirichlet et Neumann inhomogène : $u(0,t) = 0$ et $\partial_x u(1,t) = \alpha$.
  On pourra également considérer le cas périodique : $u(x,t) = u(x+1,t)$ pour tout x et résoudre sur une période.

1. Pour réduire les difficultés et faciliter le débogage le jour de l'épreuve, on recommande d'envisager d'abord une programmation « inline » i.e. sans fonctions pour les « gros algorithmes » , validée d'abord sur un cas élémentaire puis seulement encapsulée si besoin dans une fonction.