TP11 – Mise en situation sur un texte

Nous travaillons sur un modèle issu d'un texte du concours. Les éléments utiles au TP sont précisés dans ce sujet mais si besoin le texte est disponible au lien ci-après :
`https://old.agreg.org/Textes/texte2009-influnerveux_edp.pdf`

Il est question d'un modèle simplifié pour la propagation de l'influx nerveux dans un neurone ; cela fait appel aux connaissances sur les équations différentielles et aux dérivées partielles, ainsi que leurs approximations numériques. Le modèle considéré, proposé par Hodgkin et Huxley dans les années 1950, consiste en l'EDP suivante :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \nu \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(u) - w + I_0 \\ \dfrac{\partial w}{\partial t} = \epsilon(\beta u - \gamma w) \end{cases}$$

avec $f(u) = u(1-u)(u-a)$. La quantité $u(t,x)$ désigne le potentiel électrique à l'instant t le long de l'axone unidimensionnel à la position x. Il est nul au repos.
Les paramètres sont les constantes positives I_0, β, γ, ν et ϵ ainsi que $a \in]0,1[$.

Cas homogène en espace et effets de seuil

On suppose que $I_0 = 0$ et que u et w ne dépendent que de t. Le modèle se réduit alors à un système différentiel plan. Dans les expériences pratiques, le potentiel électrique peut être rendu homogène en espace par l'introduction d'un fil conducteur dans la longueur de l'axone. Celui-ci est alors ensuite soumis à un stimulus électrique qui porte le potentiel à une valeur initiale $u_0 > 0$ et $w_0 = 0$, puis il est laissé libre de réagir.

◦ Mettre en évidence numériquement, par un portrait de phase et des simulations temporelles, l'effet de seuil suivant :

— Si u_0 est faible, le potentiel revient rapidement au repos.
— Si $u_0 > u_c$, le potentiel s'accroît significativement avant de revenir au repos.

Valeurs numériques : $a = 0.25$, $\epsilon = 0.01$, $\beta = 1$, $\gamma = 6$, $I_0 = 0$.

◦ Proposer une proposition mathématique appropriée et des éléments de démonstration qui pourraient l'étayer pendant l'oral.

◦ Faire varier (seulement) le paramètre γ et expliquer pourquoi le potentiel u peut ne pas revenir au repos.

Cas général - simulation numérique d'un front propagatif

Le modèle EDP est envisagé sur le domaine d'espace $x \in [0, L]$ avec $L = 20$, et discrétisé avec un pas $\Delta x = L/N$. La version semi-discrétisée en espace utilisée est, pour $i = 1, \dots, N-1$:

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt} u_i = \dfrac{\nu}{\Delta x^2}(u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}) + f(u_i) - w_i + I_0 \\ \dfrac{d}{dt} w_i = \epsilon(\beta u_i - \gamma w_i) \end{cases}$$

L'axone est initialement au repos : $u_i(t) = w_i(t) = 0$ pour tout i. Les conditions de bords utilisées sont : $u_0(t) = h(t)$ et $u_N(t) = 0$. La fonction h décrit ici une entrée de signal de type créneau : $h(t) = h_0$ si $t \in [0, T_0]$ et $h(t) = 0$ sinon. Dans les expériences, on considérera $T_0 = 4$ et successivement les valeurs $h_0 = 3$ puis $h_0 = 4$.

◦ Programmer une méthode complétement discrète en temps et en espace, explicite ou implicite en temps, avec une discrétisation appropriée du temps, afin d'observer sur le comportement qualitatif de la solution un effet de seuil selon la valeur de h_0.

Valeurs numériques : $a = 0.25$, $\epsilon = 0.01$, $\beta = 0.2$, $\gamma = 1$, $I_0 = 0$. *Paramètres discrets :* $\Delta x = 0.2$.