TP12 et TP13 – Mise en situation sur un texte

Nous travaillons sur un modèle issu d'un texte du concours. Les éléments utiles au TP sont repris dans ce sujet mais on pourra au besoin parcourir le texte, disponible au lien ci-après :
`https://old.agreg.org/Textes/texte2009-influnerveux_edp.pdf`

Les connaissances utiles sont liées à la théorie des équations différentielles et aux dérivées partielles, ainsi que l'étude de leurs approximations numériques. Il est question d'un modèle simplifié, proposé par Hodgkin et Huxley dans les années 1950, et décrivant la propagation de l'influx nerveux dans un neurone. La quantité inconnue $u(t, x)$ désigne le potentiel électrique à l'instant t le long de l'axone unidimensionnel à la position x. L'état de repos correspond à $u = 0$. Le modèle consiste en l'EDP qui suit :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \nu \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(u) - w + I_0 \\ \dfrac{\partial w}{\partial t} = \epsilon(\beta u - \gamma w) \end{cases}$$

avec $f(u) = u(1-u)(u-a)$. Les paramètres sont les constantes positives I_0, β, γ, ν et ϵ ainsi que $a \in]0, 1[$. L'inconnue w n'a pas de sens physique et peut être appelée une variable de récupération.

Cas homogène en espace et effets de seuil

Dans un premier temps, on suppose $I_0 = 0$ (le courant électrique imposé est nul) et que u et w ne dépendent que de t. Le modèle se réduit alors à un système différentiel plan. Dans les expériences pratiques, le potentiel électrique u peut être rendu homogène en espace par l'introduction d'un fil conducteur dans la longueur de l'axone. Celui-ci est alors ensuite soumis à un stimulus électrique qui porte le potentiel à $t = 0$ à une valeur initiale $u_0 > 0$ et $w_0 = 0$, puis est laissé libre de réagir.

○ Mettre en évidence numériquement, par un portrait de phase et quelques simulations temporelles, l'effet de seuil suivant :

- Si u_0 est faible, le potentiel revient rapidement au repos.
- Si $u_0 > u_c$, le potentiel s'accroît d'abord significativement avant de revenir ensuite au repos.

Valeurs numériques : $a = 0.25$, $\epsilon = 0.01$, $\beta = 1$, $\gamma = 6$, $I_0 = 0$.

○ Établir une proposition mathématique appropriée et des éléments de démonstration qui pourraient l'étayer pendant l'oral.

○ Faire varier seulement le paramètre γ et expliquer pourquoi le potentiel u peut ne pas revenir au repos.

Simulation numérique d'un front propagatif

Le modèle EDP est considéré sur le domaine d'espace $x \in [0, L]$ avec $L = 20$, et est discrétisé avec un pas d'espace $\Delta x = L/N$. La version semi-discrétisée en espace utilisée est, pour $i = 1, \ldots, N-1$:

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt} u_i = \dfrac{\nu}{\Delta x^2}(u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}) + f(u_i) - w_i + I_0 \\ \dfrac{d}{dt} w_i = \epsilon(\beta u_i - \gamma w_i) \end{cases}$$

L'axone est initialement au repos : $u_i(t) = w_i(t) = 0$ pour tout i.
Les conditions de bord en espace sont du type Dirichlet : $u_0(t) = h(t)$ et $u_N(t) = 0$. La fonction h choisie décrit une entrée de signal de type créneau : $h(t) = h_0$ si $t \in [0, T_0]$ et $h(t) = 0$ sinon. Dans les expériences, on considérera $T_0 = 4$ et successivement les valeurs $h_0 = 3$ puis $h_0 = 4$.

○ Programmer une méthode complètement discrète en temps et en espace, explicite ou implicite en temps, avec une discrétisation appropriée du temps, afin d'observer sur le comportement qualitatif de la solution un effet de seuil selon la valeur de h_0.

Valeurs numériques : $a = 0.25$, $\epsilon = 0.01$, $\beta = 0.2$, $\gamma = 1$, $I_0 = 0$. *Paramètres discrets :* $\Delta x = 0.2$.