TP4 – Intégration numérique

Théorie. Les méthodes usuelles d'intégration numérique sont constituées par l'utilisation d'une formule de quadrature élémentaire, reproduite sur des sous-intervalles subdivisant le domaine d'intégration.
Les méthodes d'intégration numérique de Gauss permettent d'approcher la valeur d'une intégrale en utilisant un nombre minimal d'évaluations de la fonction pour un ordre de convergence maximal. Les méthodes obtenues sont alors comparativement plus précises pour un même nombre de points de quadrature. Le prix à payer est le calcul (a priori) de ces points de quadrature, qui se trouvent être les racines de polynômes orthogonaux. Les poids de la quadrature peuvent quant à eux être calculés par des formules faisant intervenir les dérivées de ces polynômes.

But du TP. *Il s'agit de mettre en œuvre une première méthode de quadrature simple, puis certaines méthodes d'intégration numérique gaussiennes et d'en comparer la performance avec les méthodes de Newton-Cotes les plus classiques.*

- ☐ Programmer la méthode des rectangles à gauche pour approcher l'intégrale suivante à l'aide d'une subdivision régulière de l'intervalle considéré avec $N = 100$ sous-intervalles : $I = \int_0^1 e^{\sin x} \mathrm{d}x$.

Il peut s'avérer compliqué de construire les polynômes orthogonaux à tout ordre, d'en calculer les racines et les poids d'intégration. On se contentera pour commencer d'une méthode particulière : la méthode de Gauss-Legendre à trois points. La méthode élémentaire correspondante est associée au poids uniforme $w(x) = 1$ sur $[0, 1]$ et correspond à l'approximation suivante :

$$\int_0^1 \varphi(x) w(x) \mathrm{d}x \simeq \frac{1}{18}\left[5\,\varphi\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{15}}{10}\right) + 8\,\varphi\left(\frac{1}{2}\right) + 5\,\varphi\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{15}}{10}\right)\right].$$

- ☐ Programmer la méthode composée correspondante pour approcher une intégrale de la forme $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$, utilisant une subdivision régulière de l'intervalle $[a, b]$.
- ☐ Programmer de même la méthode de Simpson.

1. Comparer ces deux méthodes en termes de performance (ordre de convergence) et de coût de calcul (nombre d'évaluations de la fonction). On considérera une fonction $f \in \mathcal{C}^4([0, 1])$.

- ☐ Programmer la méthode du point milieu sur $[0, 1]$ utilisant une subdivision régulière.

2. Par la méthode du point milieu, approcher l'intégrale suivante dont on fournit une valeur approchée :

$$J = \int_0^1 \frac{e^{\sin(x)}}{x^{8/9}} \mathrm{d}x \simeq 10.09485330.$$

On pourra examiner la vitesse de convergence en fonction du nombre de points de la subdivision et analyser les observations.

Un peu d'analyse. On se donne $h \in]0, 1[$ fixé. Proposer une méthode gaussienne à un point, exacte pour tout $p \in \mathbb{R}_1[X]$ dans l'évaluation de

$$\int_0^h \frac{p(x)}{x^{8/9}} \mathrm{d}x.$$

3. Approcher l'intégrale J par une méthode hybride utilisant la quadrature gaussienne obtenue sur $]0, h]$ et la quadrature composée du point milieu à n points sur $[h, 1]$. On pourra ensuite choisir h en fonction de n de manière à optimiser la vitesse de convergence.