

TP6 – Optimisation numérique

Théorème. Soit $E = \mathbb{R}^d$ et $f : E \rightarrow \mathbb{R}$.
On suppose que f est continue et coercive : $f(x) \rightarrow +\infty$ lorsque $\|x\| \rightarrow +\infty$. Alors il existe $\bar{x} \in E$ tel que $f(\bar{x}) \leq f(y)$ pour tout $y \in E$.
Si de plus f est strictement convexe, alors \bar{x} est unique.

Principe des méthodes numériques

<p>Gradient à pas fixe</p> <p>Paramètres : $\rho > 0, u_0 \in \mathbb{R}^d$ Itér. : $u_{k+1} = u_k - \rho \nabla f(u_k)$</p>	<p>Gradient à pas optimal</p> <p>Paramètres : $u_0 \in \mathbb{R}^d$ Itér. : $u_{k+1} = \operatorname{argmin}_{v \in u_k + F_k} f(v)$ où $F_k = \operatorname{Vect}(\nabla f(u_k))$</p>	<p>Gradient conjugué</p> <p>Paramètres : $u_0 \in \mathbb{R}^d$ Itér. : $u_{k+1} = \operatorname{argmin}_{v \in u_k + G_k} f(v)$ où $G_k = \operatorname{Vect}(\nabla f(u_i), 0 \leq i \leq k)$</p>
<p>Gradient à pas fixe avec projection</p> <p>Minimisation de f sur K, convexe fermé non-vide : Paramètres : $\rho > 0, u_0 \in \mathbb{R}^d$. Itérations : $u_{k+1} = P_K(u_k - \rho \nabla f(u_k))$.</p>	<p>Méthode de pénalisation</p> <p>Minimisation de f sur $\{g(u) \leq 0\}$: Minimiser par une autre méthode f_ϵ sur \mathbb{R}^d avec $f_\epsilon(u) = f(u) + g_+(u)^2/\epsilon$</p>	

Exercice 1. Minimisation d'une fonction de la variable réelle

- Expérimenter la *méthode du gradient à pas fixe* pour minimiser la fonction

$$f_3(x) = x^4 - 7x + 8.$$

On testera successivement les pas $\rho = 0.125, 0.1, 0.01$ avec l'initialisation $u_0 = 1$. La suite des itérés pourra être représentée sur la courbe représentative de f_3 .

Trame d'inspiration

```
U = 1
ListU = [U]
for j in range(N):
    U = U - rho*gradf(U)
    ListU += [U]
ListU = np.array(ListU)
plt.plot(ListU, f(ListU), 'o-')
```

Exercice 2. Méthodes de minimisation pour une fonctionnelle quadratique

Soient $A \in M_d(\mathbb{R})$ une matrice symétrique définie positive et $b \in \mathbb{R}^d$ est un vecteur donné. Alors la fonctionnelle quadratique F définie sur \mathbb{R}^d par

$$F(X) = \frac{1}{2} \langle AX, X \rangle - \langle b, X \rangle.$$

vérifie les hypothèses du théorème précédent.

L'unique minimiseur \bar{X} est alors la solution du système linéaire $A\bar{X} = b$.

- Retrouver à la main, dans ce contexte quadratique, la formule du pas ρ_k permettant d'écrire l'itération de la méthode du gradient à pas optimal sous la forme $u_{k+1} = u_k - \rho_k \nabla f(u_k)$.
- Programmer la *méthode de gradient à pas fixe* et celle du *gradient à pas optimal* pour minimiser :

$$f_1(x, y) = 2x^2 + 3x + y^2 - 2 \quad \text{et} \quad f_2(x, y) = y^2 - 2y + x^2 + 1.$$

- Représenter les itérés successifs $(u_k)_k$ dans le plan \mathbb{R}^2 , ceci pour différentes valeurs du pas ρ dans le cas de la méthode du gradient à pas fixe.
- Enrichir la représentation précédente en ajoutant des lignes de niveau de F .
On utilisera `matplotlib.contour` et `numpy.meshgrid` (voir la documentation).
Il pourra être judicieux de forcer l'échelle isométrique par `plt.axis('square')`.

Exercice 3. Minimisation avec contrainte de type inégalité

On note K le convexe fermé non-vide de \mathbb{R}^2 suivant :

$$K = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 ; x_1^2 + x_2^2 \leq 1 \text{ et } x_1 + x_2 \geq 1\}.$$

- Tester la fonction ProjK ci-contre qui détermine le projeté Y sur K d'un point X de \mathbb{R}^2 .
- Utiliser l'algorithme de *gradient à pas fixe avec projection* pour résoudre le problème de minimisation :

$$\min_{x \in K} h(x), \quad \text{avec } h(x) = x_1^2 - x_2.$$

- Représenter les itérés successifs de la méthode (on distinguera les itérés de gradient et leur projeté).

Fonction de projection sur K

```
def ProjK(X):
    x,y = X[0],X[1]
    px,py = x,y
    z1 = x+y-1
    z2 = x**2+y**2-1
    if x>0 and y>0 and z2>0:
        px = x/sqrt(x**2+y**2)
        py = y/sqrt(x**2+y**2)
    if abs(x-y)<=1 and x+y<1:
        px = x + 0.5*(1-x-y)
        py = y + 0.5*(1-x-y)
    if x-y>1 and y<0 :
        px,py = 1,0
    if x-y<-1 and x<0:
        px,py = 0,1
    return np.array([px,py])
```

Exercice 4. Minimisation d'un problème non-linéaire avec contrainte

Considérons un système de trois points matériels (sans masse) reliés par des ressorts, tel que représenté ci-dessous.

- Deux des points sont fixés dans le plan \mathbb{R}^2 aux positions respectives $(0, 0)$ et $(3, 0)$.
- Le troisième point M dont la position (x, y) reste à déterminer est relié aux premiers par des ressorts élastiques r .
- Le tout est placé sous une cloche de forme elliptique dont les dimensions principales sont indiquées. Le point M peut être en contact avec la paroi mais ne peut pas en sortir, cette contrainte détermine l'ensemble des états admissibles $M \in \text{Adm}$.
- Chacun des deux ressorts r est caractérisé par une constante de raideur k_r et une longueur d'équilibre propre L_r^0 . Les couples de valeurs indiqués sont (k_r, L_r^0) . La longueur effective dans la configuration constatée est notée L_r .

L'état du système est caractérisé par son énergie potentielle

$$E_{\text{pot}} = \sum_r \frac{1}{2} k_r (L_r^0 - L_r)^2.$$

La position d'équilibre recherchée, notée M_{opt} , correspond à un minimiseur de l'énergie potentielle parmi les états admissibles :

$$M_{\text{opt}} = \operatorname{argmin}_{M \in \text{Adm}} E_{\text{pot}}.$$

- Écrire E_{pot} comme une fonction de (x, y) .
- Par la *méthode de gradient avec pénalisation* déterminer une configuration d'équilibre.

