TP 8 – Séries de Fourier et EDP

28 février 2023

Théorie. Soit f une fonction 1-périodique et intégrable. Pour $n \in \mathbb{Z}$, on note $c_n(f)$ son coefficient de Fourier d'ordre n :

$$c_n(f) = \int_0^1 f(t) e^{-2i\pi n t} \mathrm{d}t. \tag{1}$$

La méthode des rectangles (qui coïncide ici avec celle des trapèzes) fournit l'approximation suivante

$$c_n^{(K)}(f) = \frac{1}{K} \sum_{k=0}^{K-1} f\left(\frac{k}{K}\right) e^{-2i\pi \frac{kn}{K}}. \tag{2}$$

On choisira pour K un entier pair.

On rappelle que dans le cas où la fonction f est C^∞ (comme fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$) l'approximation obtenue est bien meilleure que le résultat habituel de la méthode des trapèzes (méthode d'ordre infini). L'ensemble des valeurs $c_n^{(K)}(f)$ pour $0 \leq n \leq K-1$ est appelé *transformée de Fourier discrète* des valeurs $(f(k/K), 0 \leq k \leq K-1)$ de la fonction f. On préfère souvent considérer des fréquences symétriques par rapport à 0, soit $-\frac{K}{2} < n \leq \frac{K}{2}$. Il est possible d'organiser les calculs de manière à gagner du temps, en particulier quand K est une puissance de 2, cf l'algorithme FFT.

Partie 1 - Manipulations élémentaires.

- ◇ Programmer le calcul des coefficients de Fourier approchés d'une fonction f donnée. On pourra tester le code sur un polynôme trigonométrique, par exemple $f(x) = \cos(6\pi x) + 0.5 \sin(2\pi x)$, ainsi que sur une fonction créneau.
- ◇ Comparer avec le résultat de la fonction `fft` du module `numpy.fft` de Python. On pourra l'importer par la commande `from numpy.fft import fft, ifft`
  Tester sur un exemple en affichant le spectre de la fonction dans l'espace de Fourier. On pourra pour cela utiliser la fonction `plt.stem` avec une commande de la forme
  `plt.stem(range(-k,k),abs(c), markerfmt=" ", basefmt="-b")`
- ◇ Programmer le calcul de la somme partielle de la série de Fourier, pour $-K/2 \leq n \leq K/2$. Observer numériquement la convergence ou non vers la fonction, dans le cas du polynôme trigonométrique, puis dans le cas de la fonction créneau, pour laquelle on mettra en évidence le phénomène de Gibbs.

Partie 2 - Équation de la chaleur.

On s'intéresse maintenant à la résolution par séries de Fourier de l'équation de la chaleur 1D, pour une fonction source g et une condition au bord u_0 données. Cette équation peut modéliser l'évolution de la température dans une barre homogène rectiligne de longueur finie, après adimensionnement.

$$\begin{cases} \partial_t u(t,x) - \partial_x^2 u(t,x) = g(t,x) \text{ dans } (0,+\infty) \times (0,1), \\ u(0,x) = u_0(x) \text{ pour } x \in (0,1), \\ u(t,0) = u(t,1) = 0 \text{ pour } t > 0. \end{cases} \tag{3}$$

Lorsque u_0 et g sont de classe C^1 par rapport à x (sur $\mathbb{R}$), elles sont limites de leur série de Fourier, et on peut donc écrire point par point

$$u_0(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{u}_{0,n}\ e^{in2\pi x}, \quad g(t,x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{g}_n(t)\ e^{in2\pi x}$$

Dans un cadre plus général, on peut par exemple considérer $u_0 \in L^2(0,1)$ et $g \in C^0(0,+\infty, L^2(0,1))$ et la décomposition ci-dessus a encore un sens dans L^2 en tant que décomposition dans la base hilbertienne de Fourier (l'écriture en x est abusive).
Cherchons alors une solution u sous la forme

$$u(t,x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{u}_n(t) e^{in2\pi x} \tag{4}$$

avec $\hat{u}_n$ des fonctions C^1 sur $(0,+\infty)$, et supposons pour l'instant que u est suffisamment régulière pour qu'on puisse dériver terme à terme et écrire :

$$\partial_x^2 u(t,x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} (-4n^2\pi^2)\hat{u}_n(t) e^{in2\pi x}.$$

On montre alors aisément que les coefficients $\hat{u}_n$ sont donnés par

$$\hat{u}_n(t) = e^{-4\pi^2 n^2 t}\hat{u}_{0,n} + \int_0^t e^{-4\pi^2 n^2 (t-s)} \hat{g}_n(s) \mathrm{d}s. \tag{5}$$

Mise en œuvre.

- ◇ On commence par le cas $g = 0$. Utiliser la méthode ci-dessus pour calculer une solution approchée de l'équation de la chaleur (3). On testera différentes données initiales (fonction régulière, fonction créneau).
- ◇ Observer l'effet régularisant de l'équation.
- ◇ Dans le cas $g = 0$, observer numériquement l'évolution au cours du temps de la quantité

$$\mathcal{E}(t) = \sum_{-\frac{K}{2} \le n \le \frac{K}{2}-1} |\hat{u}_n(t)|^2.$$

  Interpréter physiquement le résultat.
- ◇ Considérer ensuite le cas de l'équation avec second membre g. On pourra tester par exemple un second membre constant puis un second membre dépendant du temps de façon sinusoïdale (on choisira la fréquence de façon à observer un changement de signe de g).

Pour aller plus loin.

- ◇ Justifier analytiquement les calculs formels menant à la solution, ainsi que la décroissance de l'énergie. [1]
- ◇ On pourra comparer la solution obtenue par cette méthode avec la solution obtenue par une méthode de différences finies (voir TP 9).
- ◇ On pourra faire le même travail avec l'équation des ondes (voir TP 10).

Références

[1] M. Schatzman, Analyse numérique, Cours et exercices pour la licence, InterEditions, 1991.