TP 8 – Séries de Fourier et EDP

16 février 2021

Théorie. Soit f une fonction 1-périodique et intégrable. Pour $n \in \mathbb{Z}$, on note $c_n(f)$ son coefficient de Fourier d'ordre n :

$$c_n(f) = \int_0^1 f(t) e^{-2i\pi n t} \mathrm{d}t. \tag{1}$$

La méthode des rectangles (qui coïncide ici avec celle des trapèzes) fournit l'approximation suivante

$$c_n^{(K)}(f) = \frac{1}{K} \sum_{k=0}^{K-1} f\left(\frac{k}{K}\right) e^{-2i\pi \frac{kn}{K}}. \tag{2}$$

On choisira pour K un entier pair. On rappelle que dans le cas où la fonction f est C^∞ (comme fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$) l'approximation obtenue est bien meilleure que le résultat habituel de la méthode des trapèzes (méthode d'ordre infini). L'ensemble des valeurs $c_n^{(K)}(f)$ pour $-K/2 \leq n \leq K/2$ est appelé *transformée de Fourier discrète* des valeurs $(f(k/K), 0 \leq k \leq K-1)$ de la fonction f. Il est possible d'organiser les calculs de manière à gagner du temps, en particulier quand K est une puissance de 2, cf l'algorithme FFT.

Partie 1 - Manipulations élémentaires.

- ◇ Programmer le calcul des coefficients de Fourier approchés d'une fonction f donnée.
- ◇ Comparer avec le résultat des fonctions `fft`. Tester sur un exemple en affichant le spectre de la fonction dans l'espace de Fourier. On pourra également regarder l'effet de la fonction `fftshift`.
- ◇ Programmer le calcul de la somme partielle de la série de Fourier, pour $-K/2 \leq n \leq K/2$. Étudier la convergence vers la fonction, dans le cas d'une fonction régulière, puis dans le cas de la fonction « créneau » pour observer le phénomène de Gibbs. Pour définir la fonction « créneau » on pourra utiliser les fonctions `floor` et `pmodulo`.

Partie 2 - Équation de la chaleur.

On s'intéresse maintenant à la résolution par séries de Fourier de l'équation de la chaleur 1D, pour une fonction source g et une condition au bord u_0 données. Cette équation peut modéliser l'évolution de la température dans une barre homogène rectiligne de longueur finie, après adimensionnement.

$$\begin{cases} \partial_t u(t,x) - \partial_x^2 u(t,x) = g(t,x) \text{ dans } (0,+\infty) \times (0,1), \\ u(0,x) = u_0(x) \text{ pour } x \in (0,1), \\ u(t,0) = u(t,1) = 0 \text{ pour } t > 0. \end{cases} \tag{3}$$

Lorsque u_0 et g sont de classe C^1 par rapport à x, elles sont limites de leur série de Fourier, et on peut donc écrire point par point

$$u_0(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{u}_{0,n}\ e^{in2\pi x}, \quad g(t,x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{g}_n(t)\ e^{in2\pi x}$$

Dans un cadre plus général, on peut par exemple considérer $u_0 \in L^2(0,1)$ et $g \in C^0(0,+\infty, L^2(0,1))$ et la décomposition ci-dessus a encore un sens dans L^2 en tant que décomposition dans la base hilbertienne de Fourier (l'écriture en x est abusive).

Cherchons alors une solution u sous la forme

$$u(t,x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{u}_n(t) e^{in2\pi x} \tag{4}$$

avec $\hat{u}_n$ des fonctions C^1 sur $(0,+\infty)$, et supposons pour l'instant que u est suffisamment régulière pour qu'on puisse dériver terme à terme et écrire :

$$\partial_x^2 u(t,x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} (-4n^2\pi^2) \hat{u}_n(t) e^{in2\pi x}.$$

On montre alors aisément que les coefficients $\hat{u}_n$ sont donnés par

$$\hat{u}_n(t) = e^{-4\pi^2 n^2 t} \hat{u}_{0,n} + \int_0^t e^{-4\pi^2 n^2 (t-s)} \hat{g}_n(s) \mathrm{d}s. \tag{5}$$

Mise en œuvre.

- ◇ Utiliser la méthode ci-dessus pour calculer une solution approchée de l'équation de la chaleur (3). On commencera par le cas $g = 0$, et on testera différentes données initiales (fonction régulière, fonction créneau).
- ◇ Observer l'effet régularisant de l'équation.

Pour aller plus loin.

- ◇ Justifier analytiquement les calculs formels menant à la solution, ainsi que la décroissance de l'énergie. [1]
- ◇ On pourra comparer la solution obtenue par cette méthode avec la solution obtenue par une méthode de différences finies (voir TP 10).
- ◇ On pourra faire le même travail avec l'équation des ondes (voir TP 9).

Références

[1] M. Schatzman, Analyse numérique, Cours et exercices pour la licence, InterEditions, 1991.