TP8 – Équation de transport linéaire 1D

Théorie. On se donné un temps $T > 0$, une donnée initiale $u_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, un champ de vecteurs $a \in C^1([0,T] \times \mathbb{R})$ tel que a et $\partial_x a$ soient bornés. On considère alors, pour une fonction inconnue $u : [0,T] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'équation de transport

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t) + a(t,x)\dfrac{\partial u}{\partial x}(x,t) = 0 \quad x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ u(x,0) = u_0(x) \quad x \in \mathbb{R}, \end{cases} \tag{1}$$

ou l'équation de continuité associée :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t) + \dfrac{\partial}{\partial x}(au)(x,t) = 0 \quad x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ u(x,0) = u_0(x) \quad x \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{2}$$

Rappelons que l'équation (1) caractérise les fonctions constantes le long du flot Φ de a (où $\Phi(t,s,y)$ désigne la valeur au temps t de la solution du problème de Cauchy $v'(t) = a(t, v(t))$, $v(s) = y$). On peut donc facilement la résoudre à l'aide de la *méthode des caractéristiques*.
L'équation (2) caractérise quant à elle les fonctions dont l'intégrale est constante sur des ensembles évoluant avec le flot de a, i.e. pour tout t et pour tout ensemble mesurable E,

$$\int_{\Phi(t,0,E)} u(t,y)\, dy = \int_E u_0(y)\, dy.$$

Pour résoudre (2), on remarque que l'EDP peut s'écrire

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) + a(t,x)\frac{\partial u}{\partial x}(x,t) = -\frac{\partial a}{\partial x}(t,x)u(t,x)$$

et on se ramène à la solution de (1) calculée par la méthode des caractéristiques en utilisant une formule de variation de la constante, ce qui fournit là encore une solution explicite. Cette méthode permet de montrer des théorèmes d'existence et d'unicité dans différents espaces vectoriels, on peut par exemple en déduire le résultat suivant :

Théorème. Si $u_0 \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$, $a \in \mathcal{C}^1([0,T] \times \mathbb{R})$ bornée ainsi que $\partial_x a$ par rapport à x, alors les problèmes (1) et (2) admettent une unique solution $u \in \mathcal{C}^1([0,T] \times \mathbb{R})$.

Dans le cas particulier où la fonction a est constante, les deux problèmes coïncident, et la solution est simplement donnée par la formule

$$u(x,t) = u_0(x - at).$$

Plus généralement, si a et u_0 sont $1-$périodiques en espace, l'unicité des solutions implique que les solutions de (1) et (2) le sont également. Nous allons nous placer dans ce cas de figure et nous ramener ainsi à des problèmes sur $[0,T] \times [0,1]$. Dans le cas où a est constant en espace, les deux équations (1) et (2) coïncident et leur solution est donnée par

$$\forall t, x \quad u(t,x) = u_0\left(x - \int_0^t a(s)\, ds\right).$$

Différentes stratégies numériques sont alors possibles : *méthodes lagrangiennes* basées sur le suivi des caractéristiques, *méthodes spectrales* basées sur l'analyse de Fourier, *méthodes de différences finies* basées sur une approximation des dérivées par des taux d'accroissement.

But du TP. *Il s'agit de mettre en œuvre quelques méthodes de différences finies pour l'approximation de l'équation* (1). *Étant donnés des pas d'espace et de temps Δx et Δt, on introduit les subdivisions $x_j = j\Delta x$ ($j \in \mathbb{Z}$) et $t_n = n\Delta t$ ($n \in \mathbb{N}$). On notera u_j^n une approximation de $u(x_j, t_n)$.*
Dans la suite, on considérera uniquement l'approximation de solutions 1*-périodiques en espace, et le domaine de calcul sera limité à $\mathbb{T} = [0, 1]$, i.e. $1 \leq j \leq J$ avec $J\Delta x = 1$.*

Mise en œuvre.

1. Programmer les deux schémas aux différences finies décentrées à gauche et à droite (dans le cas où a ne dépend pas de x, ni de t) :

$$u_j^{n+1} = u_j^n - a\frac{\Delta t}{\Delta x}\left(u_j^n - u_{j-1}^n\right) \tag{DFg}$$

$$u_j^{n+1} = u_j^n - a\frac{\Delta t}{\Delta x}\left(u_{j+1}^n - u_j^n\right) \tag{DFd}$$

2. Tester les deux schémas précédents pour $a > 0$, en prenant une donnée initiale sinusoïdale, puis une donnée inirial en créneau. Comparer leur comportement.
   Faire varier la valeur du nombre $\lambda = a\Delta t/\Delta x$. Qu'observe-t-on ?

3. À l'aide de la transformée de Fourier discrète, mener une analyse de convergence ℓ^2 des schémas précédents, selon le paramètre λ. On précisera en particulier les domaines de stabilité, définis comme ci-dessous. En déduire une explication du phénomène observé à la question précédente.
   Définition 1. *Le schéma numérique est dit stable en norme ℓ^2 sur le domaine $\mathcal{S}$ si pour tout $T > 0$, il existe une constante $C_T > 0$ telle que pour toute donnée initiale $U_0 \in \ell^2([[0, J-1]])$ et tout couple $(\Delta t, \Delta x) \in \mathcal{S}$, on ait pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n\Delta t \leq T$:*

$$\|U^n\|_2 \leq C_T \|U^0\|_2.$$

Prolongements possibles, selon le temps restant.

4. Programmer de même les schémas suivants, respectivement le schéma centré et le schéma de Lax-Wendroff. Tester les schémas pour différentes valeurs du paramètre λ et pour les mêmes données initiales que précédemment.

$$u_j^{n+1} = u_j^n - a\frac{\Delta t}{2\Delta x}\left(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n\right) \tag{C}$$

$$u_j^{n+1} = u_j^n - a\frac{\Delta t}{2\Delta x}\left(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n\right) + a^2\frac{\Delta t^2}{2\Delta x^2}\left(u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n\right) \tag{LW}$$

5. Proposer sur la base des schémas (DFg) et (DFd) un schéma permettant de traiter le cas où a dépend du temps, avec d'éventuels changements de signe (mais restant indépendant de x), par exemple $a(t) = \cos(t)$. Tester ce schéma sur les mêmes données initiales que précédemment.
6. Proposer un schéma valable pour une vitesse $a(x, t)$ quelconque, pour l'équation (1) puis pour l'équation (2).
7. Programmer la méthode des caractéristiques dans le cas où $a = a(x, t)$ est quelconque. Comparer avec la méthode précédente.