TP9 – Séries de Fourier et Équation de la Chaleur

Théorie

Soit f une fonction 1-périodique intégrable. On note c_n son coefficient de Fourier d'ordre n :

$$\hat{f}(n) = \int_0^1 f(t)e^{-2i\pi nt}dt. \tag{1}$$

La méthode des rectangles (qui coïncide ici avec celle des trapèzes) fournit l'approximation :

$$\hat{f}_K(n) = \frac{1}{K}\sum_{k=0}^{K-1} f\left(\frac{k}{K}\right) e^{-2i\pi\frac{kn}{K}}, \quad -\frac{K}{2} < n \leq \frac{K}{2}. \tag{2}$$

Dans le cas où la fonction est très régulière, l'approximation obtenue est bien meilleure que le résultat de convergence habituel pour la méthode des trapèzes. L'ensemble des valeurs $\hat{f}_K(n)$ pour $-\frac{K}{2} < n \leq \frac{K}{2}$ est appelé *transformée de Fourier discrète* de la fonction f. Il est possible d'organiser les calculs de manière astucieuse pour gagner du temps, cf. l'algorithme FFT.

On s'intéresse ici à la résolution de l'équation de la chaleur par séries de Fourier :

$$\begin{cases} \partial_t u(t,x) - \partial_x^2 u(t,x) = f(t,x), & (t,x) \in (0,+\infty) \times (0,1), \\ u(0,x) = u_0(x), & x \in (0,1), \\ u(t,0) = u(t,1) = 0, & t > 0. \end{cases} \tag{3}$$

Mise en œuvre

- Programmer le calcul du coefficient de Fourier d'ordre n d'une fonction f donnée. Tester sur une fonction régulière, puis sur une fonction « créneau » pour observer le phénomène de Gibbs.
- Résoudre l'équation de la chaleur (3) à l'aide des séries de Fourier.

Prolongements

Quelques pistes pour aller plus loin :

- Comparer la solution obtenue par la méthode précédente avec une méthode de différences finies.
- Faire le même travail avec l'équation des ondes.