
TP n° 9
ONDES

Théorie. On se donne des temps $T_1 \leq 0 \leq T_2$, une donnée initiale $(u_0, u_1) : [0,1] \to \mathbf{R}^2$, une donnée interieure $f : [T_1, T_2] \times [0,1] \to \mathbf{R}$ et une vitesse $c \in \mathbf{R}_+^*$. On considère alors pour une fonction inconnue $u : [T_1, T_2] \times [0,1] \to \mathbf{R}$ l'*équation des ondes*

$$\partial_t^2 u - c^2 \partial_x^2 u = f\,, \tag{1}$$

complétée par la donnée initiale $u(0,\cdot) = u_0$, $\partial_t u(0,\cdot) = u_1$, et les conditions de bord $u(\cdot,0) = 0$, $u(\cdot,1) = 0$.

Pour donner un sens à ces équations, il est utile de considérer $\mathbf{A} := -\partial_x^2$ comme l'opérateur (auto-adjoint défini positif) sur $L^2(]0,1[)$ de domaine $H_0^1(]0,1[) \cap H^2(]0,1[)$ obtenu par le théorème de Lax-Milgram à partir de la forme quadratique sur $H_0^1(]0,1[)$, $v \mapsto \frac{1}{2}\int_0^1 (\partial_x v)^2$. Dans ce qui précède, pour $n \in \mathbf{N}$ $H^n(]0,1[)$ désigne l'espace des fonctions dont les dérivées au sens des distributions jusqu'à l'ordre n sont dans L^2 et $H_0^n(]0,1[)$ la fermeture dans cet espace des fonctions $\mathcal{C}^\infty$ à support compact dans $]0,1[$. En particulier, $H_0^1(]0,1[)$ peut être identifié avec l'espace des fonctions continues sur $[0,1]$, nulles en 0 et en 1, et dont la dérivée au sens des distributions sur $]0,1[$ appartient à L^2.
Cet opérateur admet une base hilbertienne de fonctions propres explicites. En effet, chaque

$$e_{(k)}\ :\ [0,1] \to \mathbf{R}\,, \qquad x \mapsto \sin(\pi\, k\, x)\,, \qquad\qquad k \in \mathbf{Z}^*\,.$$

est associé à la valeur propre $(\pi\, k)^2$ pour $\mathbf{A}$, et ensemble ils forment une base hilbertienne à la fois de $L^2(]0,1[)$ et de $H_0^1(]0,1[)$. En écrivant

$$u_0 = \sum_{k \in \mathbf{Z}^*} d_k^0\, e_{(k)} \quad \text{dans } H_0^1 \qquad\qquad u_1 = \sum_{k \in \mathbf{Z}^*} d_k^1\, e_{(k)} \quad \text{dans } H_0^1\,,$$

puis en cherchant u sous la forme

$$u(t,\cdot) = \sum_{k \in \mathbf{Z}^*} d_k(t)\, e_{(k)}\,, \qquad \text{dans } H_0^1\,, \qquad\qquad \partial_t u(t,\cdot) = \sum_{k \in \mathbf{Z}^*} d_k'(t)\, e_{(k)}\,, \qquad \text{dans } L^2\,,$$

le problème devient

$$d_k''(t) \;=\; -c^2\,(\pi\, k)^2\, d_k(t)\,, \qquad\qquad t \in [T_1, T_2]\,,\ k \in \mathbf{Z}^*\,,$$

avec $d_k(0) = d_k^0$, $d_k'(0) = d_k^1$, pour $k \in \mathbf{Z}^*$.

Pour des solutions assez régulières, quand $f \equiv 0$, on déduit du point de vue précédent que

$$\frac{1}{2}\|\partial_t u(t,\cdot)\|_{L^2}^2 + \frac{1}{2}\,c^2\,\|\partial_x u(t,\cdot)\|_{L^2}^2 \;=\; \frac{1}{2}\langle \partial_t u(t,\cdot), \partial_t u(t,\cdot)\rangle_{L^2} + \frac{1}{2}\,c^2\,\langle u(t,\cdot), \mathbf{A}u(t,\cdot)\rangle_{L^2}$$

est constant en temps en récrivant (1) comme $\partial_t v = -c\sqrt{\mathbf{A}}w$, $\partial_t w = c\sqrt{\mathbf{A}}v$ avec $(v,w) = (\partial_t u, c\sqrt{\mathbf{A}}u)$ (où $\sqrt{\mathbf{A}}$ est la racine auto-adjointe positive de $\mathbf{A}$). On peut aussi le déduire du fait que, quand $f \equiv 0$, (1) se récrit sous forme symétrique

$$\partial_t \begin{pmatrix} c\,\partial_x u \\ \partial_t u \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} c\,\partial_x \begin{pmatrix} c\,\partial_x u \\ \partial_t u \end{pmatrix}$$

ce qui donne

$$\partial_t \left(\frac{1}{2} |\partial_t u|^2 + \frac{1}{2}\, c^2\, |\partial_x u|^2 \right) \;=\; c\, \partial_x \left(\frac{1}{2} \begin{pmatrix} c\, \partial_x u \\ \partial_t u \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c\, \partial_x u \\ \partial_t u \end{pmatrix} \right) \;=\; c^2 \partial_x (\partial_t u\, \partial_x u)\,,$$

qui s'intègre pour donner la conservation si u est assez régulière pour justifier $\partial_t u(\cdot, 0) = 0$, $\partial_t u(\cdot, 1) = 0$.

Mise en œuvre. Nous allons considérer une méthode de différences finies. On fixe $T_1 = 0$, $T_2 = T > 0$. Étant donnés des pas d'espace et de temps Δx et Δt tels que $N_x := 1/\Delta x \in \mathbf{N}^*$ et $N_t := T/\Delta t \in \mathbf{N}^*$, on introduit les nœuds $x_j = j\Delta x$, $j \in [\![1, N_x - 1]\!]$, et $t_n = n\Delta t$, $n \in [\![0, N_t]\!]$. Nous allons calculer u_j^n des valeurs en (t_n, x_j) censées fournir une approximation des valeurs $u(t_n, x_j)$ de la solution.

- ◇ Programmer et tester le schéma aux différences finies suivant

$$\frac{u_j^{n+1} - 2u_j^n + u_j^{n-1}}{\Delta t^2} = c^2 \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{\Delta x^2} + f_j^n\,, \qquad n \geq 1\,, \quad 1 \leq j \leq N_x - 1\,, \qquad \text{(DF)}$$

complété par l'initialisation

$$u_j^0 = u_0(x_j)\,, \qquad u_j^1 = u_0(x_j) + (\Delta t)\, u_1(x_j)\,, \qquad 1 \leq j \leq N_x - 1\,, \qquad \text{(DF-data)}$$

où les valeurs en dehors de $j \in [\![1, N_x - 1]\!]$ sont obtenues par les conditions de bord $u_0^n = 0$, $u_{N_x}^n = 0$, et $f_j^n = f(t_n, x_j)$. On veillera à faire varier le paramètre $\lambda := c\Delta t/\Delta x$. On pourra également tester le remplacement de l'initialisation de u_j^1 ci-dessus par

$$u_j^1 = u_0(x_j) + (\Delta t)\, u_1(x_j) + \frac{1}{2}\, (\Delta t)^2 \left(c^2 \frac{u_0(x_{j+1}) - 2u_0(x_j) + u_0(x_{j-1})}{\Delta x^2} + f(0, x_j) \right)\,.$$

- ◇ Pour préparer l'analyse du schéma et mimer l'analyse continue, introduisons la matrice de discrétisation de $\mathbf{A} = -\partial_x^2$ par différences finies

$$A_{N_x} = \frac{1}{\Delta x^2} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & \dots & \dots \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \dots & \dots \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & \dots \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ \dots & \dots & \dots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Montrer par une intégration par parties discrète que A_{N_x} est auto-adjointe, définie positive et calculer explicitement ses vecteurs propres et valeurs propres. Pour ce dernier point, on pourra tester des fonctions trigonométriques discrètes.

- ◇ En déduire que $\lambda \leq 1$ est une condition nécessaire de stabilité pour le schéma précédent.

- ◇ Montrer que, dans le cas où $f \equiv 0$,

$$\frac{1}{2}\, \|V^n\|_{\ell^2}^2 + \frac{1}{2}\, c^2\, U^{n+1} \cdot A_{N_x} U^n$$

avec $U^n = (u_j^n)_j$ et $V^n = ((u_j^n - u_j^{n-1})/\Delta t)_j$, est constant en n. Montrer par ailleurs que

$$\left| \frac{1}{2}\, \|V^n\|_{\ell^2}^2 + \frac{1}{2}\, c^2\, U^{n+1} \cdot A_{N_x} U^n - \left(\frac{1}{2}\, \|V^n\|_{\ell^2}^2 + \frac{1}{2}\, c^2\, \frac{U^n + U^{n+1}}{2} \cdot A_{N_x} \frac{U^n + U^{n+1}}{2} \right) \right| \leq \frac{1}{2}\, \lambda^2\, \|V^n\|_{\ell^2}^2\,.$$

Conclure l'analyse de convergence.