# TP6 – Optimisation numérique

**Théorème.** *Soit $E = \mathbb{R}^d$ et $f : E \to \mathbb{R}$.*
*On suppose que $f$ est continue et coercive : $f(x) \to +\infty$ lorsque $\|x\| \to +\infty$. Alors il existe $\bar{x} \in E$ tel que $f(\bar{x}) \leq f(y)$ pour tout $y \in E$.*
*Si de plus $f$ est strictement convexe, alors $\bar{x}$ est unique.*

## Principe des méthodes numériques

**Gradient à pas fixe**

Paramètres : $\rho > 0$, $u_0 \in \mathbb{R}^d$
Itér. : $u_{k+1} = u_k - \rho \nabla f(u_k)$

**Gradient à pas optimal**

Paramètres : $u_0 \in \mathbb{R}^d$
Itér. : $u_{k+1} = \mathrm{argmin}_{v \in u_k + F_k} f(v)$
où $F_k = \mathrm{Vect}(\nabla f(u_k))$

**Gradient conjugué**

Paramètres : $u_0 \in \mathbb{R}^d$
Itér. : $u_{k+1} = \mathrm{argmin}_{v \in u_k + G_k} f(v)$
où $G_k = \mathrm{Vect}(\nabla f(u_i), 0 \leq i \leq k)$

**Gradient à pas fixe avec projection**
Minimisation de $f$ sur $K$, convexe fermé non-vide :
Paramètres : $\rho > 0$, $u_0 \in \mathbb{R}^d$.
Itérations : $u_{k+1} = P_K(u_k - \rho \nabla f(u_k))$.

**Méthode de pénalisation**
Minimisation de $f$ sur $\{g(u) \leq 0\}$ :
Minimiser par une autre méthode $f_\epsilon$ sur $\mathbb{R}^d$ avec
$f_\epsilon(u) = f(u) + g_+(u)^2/\epsilon$

### Exercice 1. Minimisation d'une fonction de la variable réelle

- Expérimenter la méthode du gradient à pas fixe dans le cas suivant

$$f_3(x) = x^4 - 7x + 8.$$

On testera sucessivement les pas $\rho = 0.125,\ 0.1,\ 0.01$ avec l'initialisation $u_0 = 1$.

### Exercice 2. Méthodes de minimisation pour une fonctionnelle quadratique

Soient $A \in \mathrm{M}_d(\mathbb{R})$ une matrice symétrique définie positive et $b \in \mathbb{R}^d$ est un vecteur donné. Alors la fonctionnelle quadratique $F$ définie sur $\mathbb{R}^d$ par

$$F(X) = \frac{1}{2}\langle AX, X\rangle - \langle b, X\rangle.$$

vérifie les hypothèses du théorème précédent.
L'unique minimiseur $\bar{X}$ est alors la solution du système linéaire $A\bar{X} = b$.

- Retrouver dans ce contexte quadratique la formule du pas $\rho_k$ permettant d'écrire l'itération de la méthode du gradient à pas optimal sous la forme $u_{k+1} = u_k - \rho_k \nabla f(u_k)$.
- Programmer la méthode de gradient à pas fixe et celle du gradient à pas optimal pour chacune des fonctions suivantes :

$$f_1(x, y) = 2x^2 + 3x + y^2 - 2 \quad \text{et} \quad f_2(x, y) = y^2 - 2y + x^2 + 1.$$

- Représenter les itérés successifs $(u_k)_k$ dans le plan $\mathbb{R}^2$, ceci pour différentes valeurs du pas $\rho$ dans le cas de la méthode du gradient à pas fixe.
- Enrichir la représentation précédente en ajoutant des lignes de niveau de $F$. On utilisera `matplotlib.contour` et `numpy.meshgrid` – voir la documentation.

**Exercice 3. Minimisation avec contrainte de type inégalité**

On note $K$ le convexe fermé non-vide de $\mathbb{R}^2$ suivant : $K = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \,;\ x_1^2 + x_2^2 \leq 1 \text{ et } x_1 + x_2 \geq 1\}$.

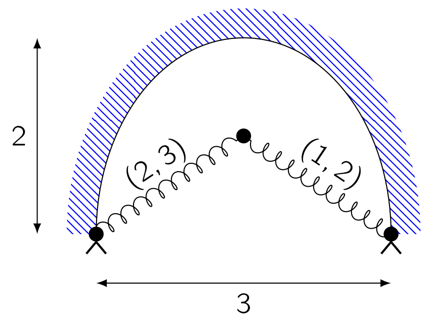
- Après l'avoir déterminée, implémenter une fonction `ProjK` qui réalise la projection d'un point `X` de $\mathbb{R}^2$ sur $K$.
- Utiliser l'algorithme de gradient à pas fixe avec projection pour résoudre le problème de minimisation :

$$\min_{x\in K} h(x), \quad \text{avec } h(x) = x_1^2 - x_2.$$

- Représenter les itérés successifs de la méthode (en distinguant les itérés de gradient et leur projeté).
- Reprendre le problème précédent à l'aide d'une méthode de pénalisation.

**Exercice 4. Minimisation d'un problème non-linéaire avec contrainte**

Considérons un système de trois points matériels (sans masse) reliés par des ressorts comme l'indique le schéma suivant. Deux des points sont fixés dans le plan $\mathbb{R}^2$ aux positions $(0,0)$ et $(3,0)$. Le troisième point, dont la position reste à déterminer est placé sous une cloche elliptique, également fixée, dont les dimensions principales figurent sur le schéma. Ce dernier point peut être amené à entrer en contact avec la cloche. Chacun des deux ressorts $r$ est caractérisé par une constante de raideur $k_r$, une longueur d'équilibre propre $L_r^0$ et la longueur effective dans la configuration constatée $L_r$. Les valeurs indiquées sur le schéma correspondent à $(k_r, L_r^0)$.




Par une méthode de votre choix, déterminer une configuration d'équilibre minimisant l'énergie du système :

$$E_{\text{pot}} = \sum_r \frac{1}{2} k_r (L_r^0 - L_r)^2.$$