TP6 – Optimisation numérique

Théorème. *Soit $E = \mathbb{R}^d$ et $f : E \to \mathbb{R}$.*
On suppose que f est continue et coercive : $f(x) \to +\infty$ lorsque $\|x\| \to +\infty$. Alors il existe $\bar{x} \in E$ tel que $f(\bar{x}) \leq f(y)$ pour tout $y \in E$.
Si de plus f est strictement convexe, alors $\bar{x}$ est unique.

Principe des méthodes numériques

Gradient à pas fixe

Paramètres : $\rho > 0$, $u_0 \in \mathbb{R}^d$
Itér. : $u_{k+1} = u_k - \rho \nabla f(u_k)$

Gradient à pas optimal

Paramètres : $u_0 \in \mathbb{R}^d$
Itér. : $u_{k+1} = \operatorname{argmin}_{v \in u_k + F_k} f(v)$
où $F_k = \mathrm{Vect}(\nabla f(u_k))$

Gradient conjugué

Paramètres : $u_0 \in \mathbb{R}^d$
Itér. : $u_{k+1} = \operatorname{argmin}_{v \in u_k + G_k} f(v)$
où $G_k = \mathrm{Vect}(\nabla f(u_i), 0 \leq i \leq k)$

Gradient à pas fixe avec projection

Minimisation de f sur K, convexe fermé non-vide :
Paramètres : $\rho > 0$, $u_0 \in \mathbb{R}^d$.
Itérations : $u_{k+1} = P_K(u_k - \rho \nabla f(u_k))$.

Méthode de pénalisation

Minimisation de f sur $\{g(u) \leq 0\}$:
Minimiser par une autre méthode f_ϵ sur $\mathbb{R}^d$ avec
$f_\epsilon(u) = f(u) + g_+(u)^2/\epsilon$

Exercice 1. Minimisation d'une fonction de la variable réelle

- Expérimenter la *méthode du gradient à pas fixe* pour minimiser la fonction

$$f_3(x) = x^4 - 7x + 8.$$

On testera sucessivement les pas $\rho = 0.125,\ 0.1,\ 0.01$ avec l'initialisation $u_0 = 1$. La suite des itérés pourra être représentée sur la courbe représentative de f_3.

Trame d'inspiration

```
U = 1
ListU = [U]
for j in range(N):
    U = U - rho*gradf(U)
    ListU += [U]
ListU = np.array(ListU)
plt.plot(ListU,f(ListU),'o-')
```

Exercice 2. Méthodes de minimisation pour une fonctionnelle quadratique

Soient $A \in \mathrm{M}_d(\mathbb{R})$ une matrice symétrique définie positive et $b \in \mathbb{R}^d$ est un vecteur donné. Alors la fonctionnelle quadratique F définie sur $\mathbb{R}^d$ par

$$F(X) = \frac{1}{2}\langle AX, X\rangle - \langle b, X\rangle.$$

vérifie les hypothèses du théorème précédent.
L'unique minimiseur $\bar{X}$ est alors la solution du système linéaire $A\bar{X} = b$.

- Retrouver à la main, dans ce contexte quadratique, la formule du pas ρ_k permettant d'écrire l'itération de la méthode du gradient à pas optimal sous la forme $u_{k+1} = u_k - \rho_k \nabla f(u_k)$.
- Programmer la *méthode de gradient à pas fixe* et celle du *gradient à pas optimal* pour minimiser :

$$f_1(x, y) = 2x^2 + 3x + y^2 - 2 \quad \text{et} \quad f_2(x, y) = y^2 - 2y + x^2 + 1.$$

- Représenter les itérés successifs $(u_k)_k$ dans le plan $\mathbb{R}^2$, ceci pour différentes valeurs du pas ρ dans le cas de la méthode du gradient à pas fixe.
- Enrichir la représentation précédente en ajoutant des lignes de niveau de F.
On utilisera `matplotlib.contour` et `numpy.meshgrid` (voir la documentation).
Il pourra être judicieux de forcer l'échelle isométrique par `plt.axis('square')`.

Exercice 3. Minimisation avec contrainte de type inégalité

On note K le convexe fermé non-vide de $\mathbb{R}^2$ suivant :

$$K = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \; ; \; x_1^2 + x_2^2 \leq 1 \text{ et } x_1 + x_2 \geq 1\}.$$

- Tester la fonction `ProjK` ci-contre qui détermine le projeté `Y` sur K d'un point `X` de $\mathbb{R}^2$.

- Utiliser l'algorithme de *gradient à pas fixe avec projection* pour résoudre le problème de minimisation :

$$\min_{x \in K} h(x), \quad \text{avec } h(x) = x_1^2 - x_2.$$

- Représenter les itérés successifs de la méthode (on distinguera les itérés de gradient et leur projeté).

Fonction de projection sur K

```
def ProjK(X):
x,y = X[0],X[1]
px,py = x,y
z1 = x+y-1
z2 = x**2+y**2-1
if x>0 and y>0 and z2>0:
    px = x/sqrt(x**2+y**2)
    py = y/sqrt(x**2+y**2)
if abs(x-y)<=1 and x+y<1:
    px = x + 0.5*(1-x-y)
    py = y + 0.5*(1-x-y)
if x-y>1 and y<0 :
    px,py = 1,0
if x-y<-1 and x<0:
    px,py = 0,1
return np.array([px,py])
```

Exercice 4. Minimisation d'un problème non-linéaire avec contrainte

Considérons un système de trois points matériels (sans masse) reliés par des ressorts, tel que représenté ci-dessous.

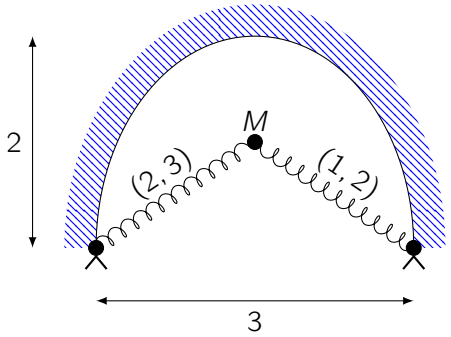
- Deux des points sont fixés dans le plan $\mathbb{R}^2$ aux positions respectives $(0, 0)$ et $(3, 0)$.
- Le troisième point M *dont la position* (x, y) *reste à déterminer* est relié aux premiers par des ressorts élastiques r.
- Le tout est placé sous une cloche de forme elliptique dont les dimensions principales sont indiquées. Le point M peut être en contact avec la paroi mais ne peut pas en sortir, cette contrainte détermine l'ensemble des états admissibles $M \in \text{Adm}$.
- Chacun des deux ressorts r est caractérisé par une constante de raideur k_r et une longueur d'équilibre propre L_r^0. Les couples de valeurs indiqués sont (k_r, L_r^0). La longueur effective dans la configuration constatée est notée L_r.

L'état du système est caractérisé par son énergie potentielle

$$E_{\text{pot}} = \sum_r \frac{1}{2} k_r (L_r^0 - L_r)^2.$$

La position d'équilibre recherchée, notée M_{opt}, correspond à un minimiseur de l'énergie potentielle parmi les état admissibles :

$$M_{\text{opt}} = \text{argmin}_{M \in \text{Adm}} E_{\text{pot}}.$$



- Écrire E_{pot} comme une fonction de (x, y).
- Par la *méthode de gradient avec pénalisation* déterminer une configuration d'équilibre.