
TP n° 7
Transport

Théorie. On se donne des temps $T_1 \leq 0 \leq T_2$, une donnée initiale $u_0 : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, et un champ de vecteurs $a : [T_1, T_2] \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $(t, x) \mapsto a(t, x)$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que u et $\partial_x u$ soient bornés. On considère alors pour une fonction inconnue $u : \mathbf{R} \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ l'*équation de transport* associée

$$\partial_t u + a\partial_x u = 0\,, \tag{1}$$

ou l'*équation de continuité* associée

$$\partial_t u + \partial_x(a\,u) = 0\,, \tag{2}$$

complétées par la donnée initiale

$$u(0, \cdot) = u_0\,. \tag{3}$$

Pour rappeler le sens de ces équations, notons Φ le flot associé à a, c'est-à-dire que $\Phi(t, s, y)$ est la valeur au temps t de la solution de l'équation différentielle associée à a partant de y au temps s. L'équation (1) caractérise les fonctions constantes le long du flot de a, c'est-à-dire que pour tout (t, x)

$$u(t, \Phi(t, 0, x)) \;=\; u_0(x)\,.$$

L'équation (2) caractérise les fonctions dont l'intégrale est constante sur les ensembles évoluant avec le flot de a, c'est-à-dire que pour tout t et tout ensemble mesurable E,

$$\int_{\Phi(t,0,E)} u(t, y)\,\mathrm{d}y \;=\; \int_E u_0(x)\,\mathrm{d}y$$

avec $\Phi(t, 0, E) := \Phi(t, 0, \cdot)(E)$. Les équations (1) et (2) sont duales l'une de l'autre ; ainsi, par exemple si u_1 résout (1) et u_2 résout (2) avec $u_1 \times u_2$ nul à l'infini, on a pour tout t

$$\int_{\mathbf{R}} u_1(t, y)\, u_2(t, y)\,\mathrm{d}y \;=\; \int_{\mathbf{R}} u_1(0, y)\, u_2(0, y)\,\mathrm{d}y\,.$$

L'équation (1) se résout naturellement par la *méthode des caractéristiques*. En utilisant soit un argument de dualité soit un argument de variation de la constante basé sur la forme $\partial_t u + a\partial_x u = -(\partial_x a)u$, on en déduit une formule de résolution pour (2). Cela permet de traiter [1] les problèmes de Cauchy pour toutes sortes d'espace fonctionnels : $\mathcal{C}^1(\mathbf{R})$, $\mathcal{C}^0(\mathbf{R})$, $L^p(\mathbf{R})$ $(1 \leq p \leq \infty)$, $L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R})$, et, quand $a \in \mathcal{C}^\infty$, $\mathcal{C}^\infty(\mathbf{R})$, $\mathcal{C}^\infty_c(\mathbf{R})$, $\mathcal{D}'(\mathbf{R})$, *etc.* Le théorème suivant en est un exemple.

Théorème 1 *Pour tout $u_0 \in \mathcal{C}^1(\mathbf{R})$, les problèmes de Cauchy* (1)-(3) *et* (2)-(3) *possédent tous deux une unique solution $u \in \mathcal{C}^1([T_1, T_2] \times \mathbf{R})$.*

1. Les formules donnent directement des résultats d'existence pour (1) et (2). La dualité permet de déduire d'un résultat d'existence pour une équation un résultat d'unicité pour l'autre (dans des espaces en dualité).

De l'unicité des solutions découle que si u_0 et a sont périodiques en espace de période 1 alors il en est de même pour les solutions de (1)-(3) et (2)-(3). Nous allons nous focaliser sur ce cas de figure. Par l'indentification classiques des espaces de fonctions (ou de distributions) sur $\mathbf{R}/\mathbf{Z}$ avec des espaces de fonctions (ou des distributions) sur $[0,1]$ incluant des conditions aux bords périodiques, les problèmes de Cauchy sur $[T_1, T_2] \times \mathbf{R}$ peuvent être récrits comme des problèmes avec données initiales et conditions de bord sur $[T_1, T_2] \times [0,1]$.
Dans un premier temps, nous allons même nous restreindre au cas où a est constant au moins en espace. Dans ce cas, (1)-(3) et (2)-(3) coïncident et les solutions sont données par

$$u(t,x) \;=\; u_0\left(x - \int_0^t a(s)\,\mathrm{d}s\right)\,.$$

Cela permet de mener une étude assez directe [2] dans les espaces de type ℓ^2 basée sur l'analyse de Fourier. Dans ce cas de figure différentes stratégies numériques de calcul s'offrent à nous : méthodes basées sur les caractéristiques dites *lagrangiennes*, méthodes basées sur les séries de Fourier dites *spectrales*, méthodes basées sur l'approximation des dérivées par des taux d'accroissement dites des *différences finies*, *etc.*

Mise en œuvre. Nous allons mettre en œuvre quelques méthodes de différences finies. Dans toute la suite on fixe a constant, $a > 0$, $T_1 = 0$, $T_2 = T > 0$. Étant donnés des pas d'espace et de temps Δx et Δt tels que $N_x := 1/\Delta x \in \mathbf{N}^*$ et $N_t := T/\Delta t \in \mathbf{N}^*$, on introduit les nœuds de subdivisions $x_j = j\Delta x$, $j \in [\![1, N_x]\!]$, et $t_n = n\Delta t$, $n \in [\![0, N_t]\!]$. Nous allons calculer u_j^n des valeurs en (t_n, x_j) censées fournir une approximation des valeurs $u(t_n, x_j)$ de la solution. Les schémas seront à tester avec des données initiales u_0 trigonométriques ou fonctions caractéristiques.

- ⋄ Programmer et tester les deux schémas aux différences finies décentrées à gauche et à droite

$$u_j^{n+1} = u_j^n - a\frac{\Delta t}{\Delta x}\left(u_j^n - u_{j-1}^n\right) \tag{DFg}$$

$$u_j^{n+1} = u_j^n - a\frac{\Delta t}{\Delta x}\left(u_{j+1}^n - u_j^n\right) \tag{DFd}$$

  où les valeurs en dehors de $j \in [\![1, N_x]\!]$ sont obtenues par périodicité, $u_0^n = u_{N_x}^n$, $u_{N_x+1}^n = u_1^n$. On veillera à faire varier le paramètre $\lambda := a\Delta t/\Delta x$.

- ⋄ À l'aide de la transformée de Fourier discrète, mener une analyse de convergence ℓ^2 des schémas précédents, en fonction du paramètre λ.

- ⋄ Faire de même pour le schéma centré et le schéma de Lax-Wendroff.

$$u_j^{n+1} = u_j^n - a\frac{\Delta t}{2\Delta x}\left(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n\right) \tag{C}$$

$$u_j^{n+1} = u_j^n - a\frac{\Delta t}{2\Delta x}\left(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n\right) + a^2\frac{\Delta t^2}{2\Delta x^2}\left(u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n\right) \tag{LW}$$

- ⋄ Sur la base des schémas (DFg) et (DFd) proposer un schéma pour traiter le cas où a est constant en espace mais pas en temps, avec d'éventuels changements de signe.

2. On espère que l'analyse et les tests menés sur ce cas trivial renseignent sur des cas plus élaborés difficiles à analyser.