Université de Rennes 1 2020-2021

Agrégation externe

Éléments de correction
du TP n° 7 - Transport

Miguel Rodrigues

---

1 Analyse de convergence

Nous allons utiliser la transformée de Fourier discrète en espace pour mener à bien une analyse de convergence ℓ^2. Rappelons que si $U = (u_j)_{j\in[\![0,N_x-1]\!]}$ est un vecteur de transformée de Fourier discrète $C = (c_k)_{k\in[\![0,N_x-1]\!]}$, c'est-à-dire que

$$c_k = \frac{1}{N_x}\sum_{j=0}^{N_x-1} u_j\, e^{-\mathrm{i}k\,2\pi\,\frac{j}{N_x}}\,,\qquad k\in[\![0,N_x-1]\!]\,,$$

alors

$$\|(c_0,\cdots,c_{N_x-1})\|_{\ell^2([\![0,N_x-1]\!])} \;=\; \frac{1}{\sqrt{N_x}}\,\|(u_0,\cdots,u_{N_x-1})\|_{\ell^2([\![0,N_x-1]\!])}\,.$$

Notez que si U est la discrétisation d'une fonction u sur $[0,1]$ alors

$$\lim_{N_x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{N_x}}\,\|(u_0,\cdots,u_{N_x-1})\|_{\ell^2([\![0,N_x-1]\!])} \;=\; \|u\|_{L^2(0,1)}\,.$$

1.1 Schéma à gauche

Commençons par analyser le schéma

$$u_j^{n+1} = u_j^n - a\frac{\Delta t}{\Delta x}\left(u_j^n - u_{j-1}^n\right)\,. \tag{DFg}$$

Du côté de Fourier discret cela devient

$$C_k^{n+1} = \left(1 - a\,\frac{\Delta t}{\Delta x}\,\left(1 - e^{-\mathrm{i}k\,\frac{2\pi}{N_x}}\right)\right)\,C_k^n\,.$$

La stabilité utile pour l'analyse de convergence est celle de stabilité par rapport aux erreurs dans l'équation, mais via la formule de variation de la constante discrète cela équivaut à l'étude de stabilité par rapport aux données initiales. Pour une analyse de convergence ℓ^2 on cherche donc à savoir sous quelle contrainte sur Δt et Δx (autorisant à prendre une limite $(\Delta t,\Delta x)\to(0,0)$) il existe une constante C_T telle que pour tout $(\Delta t,\Delta x)$ vérifiant la contrainte, pour toute donnée initiale $U^0 = (u_0^0,\cdots,u_{N_x-1}^0)$, la solution du schéma ci-dessus vérifie,

$$\frac{1}{\sqrt{N_x}}\,\|(u_0^n,\cdots,u_{N_x-1}^n)\|_{\ell^2([\![0,N_x-1]\!])} \leq C_T\,\frac{1}{\sqrt{N_x}}\,\|(u_0^0,\cdots,u_{N_x-1}^0)\|_{\ell^2([\![0,N_x-1]\!])}\,,\qquad 0\leq n\,\Delta t\leq T\,.$$

L'analyse de Fourier ci-dessus montre que la condition équivaut à

$$\left(1 - a\,\frac{\Delta t}{\Delta x}\,\left(1 - e^{-\mathrm{i}k\,\frac{2\pi}{N_x}}\right)\right)^n \leq C_T\,,\qquad\qquad 0\leq n\,\Delta t\leq T\,,\quad 0\leq k\leq N_x-1\,.$$

En se focalisant sur le cas où la limite $(\Delta t, \Delta x) \to (0,0)$ est prise avec $\Delta t/\Delta x$ fixé, et en posant $\lambda := a\Delta t/\Delta x$, l'existence d'une constante C_T pour un $T>0$ est équivalente à

$$\left|1-\lambda\left(1-e^{-\mathrm{i}\xi}\right)\right| \leq 1\,, \qquad 0 \leq \xi \leq 2\,\pi\,,$$

et dans ce cas on peut prendre $C_T = 1$ pour tout $T>0$. Un peu de géométrie élémentaire montre que la condition de stabilité se résout en

$$\lambda \leq 1\,,$$

connue comme condition de Courant–Friedrichs–Lewy.

Pour compléter l'analyse de convergence, intéressons-nous à la question de la consistance. Soit $u : [0,T] \times \mathbf{R}/\mathbf{Z} \to \mathbf{R}$ résolvant

$$\partial_t u + a\partial_x u = 0\,.$$

Considérons $\mathcal{U}_j^n = u(n\,\Delta t, j\,\Delta x)$, et les valeurs de la transformée de Fourier discrète associée $\mathcal{C}_k^n$. Alors

$$\mathcal{C}_k^{n+1} \;=\; e^{-\mathrm{i}k\,\frac{2\pi}{N_x}\,\lambda}\,\mathcal{C}_k^n$$

de sorte que

$$\mathcal{C}_k^{n+1} - \left(1-\lambda\left(1-e^{-\mathrm{i}k\,\frac{2\pi}{N_x}}\right)\right)\mathcal{C}_k^n \;=\; \left(e^{-\mathrm{i}k\,\frac{2\pi}{N_x}\,\lambda} - \left(1-\lambda\left(1-e^{-\mathrm{i}k\,\frac{2\pi}{N_x}}\right)\right)\right)\mathcal{C}_k^n$$

avec

$$\begin{aligned} e^{-\mathrm{i}k\,\frac{2\pi}{N_x}\,a\,\lambda} - \left(1-\lambda\left(1-e^{-\mathrm{i}k\,\frac{2\pi}{N_x}}\right)\right) &= e^{-\mathrm{i}k\,2\pi\,a\,\Delta t} - 1 + \mathrm{i}k\,2\pi\,a\,\Delta t + \lambda\left(1-\mathrm{i}k\,2\pi\,\Delta x - e^{-\mathrm{i}k\,2\pi\,\Delta x}\right)\\ &= \mathcal{O}\left(k^2\,\Delta t\,(\Delta t+\Delta x)\right)\,. \end{aligned}$$

Ainsi pour certaines constantes C, C'

$$\begin{aligned} \left\|\left(\mathcal{C}_k^{n+1} - \left(1-\lambda\left(1-e^{-\mathrm{i}k\,\frac{2\pi}{N_x}}\right)\right)\mathcal{C}_k^n\right)_k\right\|_{\ell^2([\![0,N_x-1]\!])} &\leq\; C\,\Delta t\,(\Delta t+\Delta x)\,\left\|\left(k^2\,\mathcal{C}_k^n\right)_k\right\|_{\ell^2([\![0,N_x-1]\!])}\\ &\leq\; C'\,\Delta t\,(\Delta t+\Delta x)\,\|\partial_x^3 u(n\Delta t,\cdot)\|_{L^2(0,1)}\,. \end{aligned}$$

En combinant avec l'estimation de stabilité, on déduit que si $\lambda \leq 1$, et que U résout le schéma avec $u_j^0 = \mathcal{U}_j^0$, alors

$$\|(u_k^n - \mathcal{U}_k^n)_k\|_{\ell^2([\![0,N_x-1]\!])} \;\leq\; C'\,T\,(\Delta t+\Delta x)\,\|\partial_x^3 u\|_{L^\infty(0,T;L^2(0,1))}\,, \qquad 0 \leq n\Delta t \leq T\,.$$

On a ainsi montré un convergence à l'ordre 1 dans ℓ^2 sous la condition CFL $\lambda \leq 1$. Rappelons que si on le souhaite on peut transformer cette estimation en une estimation entre fonctions sur $[0,T]\times[0,1]$ en interpolant les valeurs discrètes de U.

1.2 Autres schémas

Pour les autres schémas contentons-nous de nous intéresser à la stabilité.

Le schéma à droite

$$u_j^{n+1} = u_j^n - a\frac{\Delta t}{\Delta x}\left(u_{j+1}^n - u_j^n\right) \tag{DFd}$$

devient côté Fourier

$$C_k^{n+1} = \left(1 - a\,\frac{\Delta t}{\Delta x}\,\left(e^{\mathrm{i}k\,\frac{2\pi}{N_x}} - 1\right)\right)\,C_k^n\,.$$

En se focalisant encore une fois sur le cas où la limite $(\Delta t, \Delta x) \to (0,0)$ est prise avec $\Delta t/\Delta x$ fixé, la condition de stabilité devient

$$\left|1 - \lambda \left(e^{\mathrm{i}\xi} - 1\right)\right| \leq 1\,, \qquad 0 \leq \xi \leq 2\,\pi\,.$$

Un peu de géométrie élémentaire montre cette fois que la condition n'est jamais vérifiée.
De même, le schéma centré

$$u_j^{n+1} = u_j^n - a\frac{\Delta t}{2\Delta x}\left(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n\right) \tag{C}$$

se récrit en Fourier

$$C_k^{n+1} = \left(1 - \mathrm{i}\,a\,\frac{\Delta t}{\Delta x}\,\sin\left(k\,\frac{2\pi}{N_x}\right)\right)\,C_k^n\,.$$

La même analyse de stabilité conduit à la condition de stabilité

$$|1 - \mathrm{i}\lambda\,\sin(\xi)| \leq 1\,, \qquad 0 \leq \xi \leq 2\,\pi\,,$$

qui n'est jamais vérifiée.
L'analyse de stabilité du schéma de Lax-Wendroff conduit à une condition de stabilité moins immédiate à résoudre mais qui équivaut à $\lambda \leq 1$.

2 Exemple de code

```
/////////////////////////////
//    Transport            //
/////////////////////////////

Nx = 2000; //Nombre de pas spatiaux
hx=1/Nx; //Pas spatial, periode fixee a 1
a=0.25; //Vitesse, ici supposee >0
T=1; //Temps final
lambda=0.9; //CFL
ht = hx/(a*lambda); //Pas temporel
Nt= floor(T/ht); //Nombre de pas temporels

// Donnee initiale

x=hx*(1:Nx);
//Trigo
//u0=cos(6*%pi*x);
//Caracteristique
u0=zeros(1,Nx);
nx=floor(Nx/10);
u0(1,3*nx:(5*nx))=ones(1,2*nx+1);

scf(1);
clf();
plot(x,u0);
xlabel('Espace');
ylabel('Valeur');
```

```
title('Donnee initiale');

v=u0;
U=[v];//si l'on souhaite stocker toutes les valeurs
for i=1:Nt
//a gauche
        w=[v(1,Nx) v(1,1:(Nx-1))];//a gauche
        v=(1-lambda)*v+lambda*w;//a gauche
//a droite
//      w=[v(1,2:Nx) v(1,1)];//a droite
//      v=(1+lambda)*v-lambda*w;//a droite
//centre
//      w=[v(1,Nx) v(1,1:(Nx-1))];//centre
//      z=[v(1,2:Nx) v(1,1)];//centre
//      v=v-(lambda/2)*(z-w);//centre
//Lax-Wendroff
//      w=[v(1,Nx) v(1,1:(Nx-1))];//Lax-Wendroff
//      z=[v(1,2:Nx) v(1,1)];//Lax-Wendroff
//      v=v*(1-lambda^2)-((lambda-lambda^2)/2)*z+((lambda+lambda^2)/2)*w;//Lax-Wend
//
        U=[U; v];//si l'on souhaite stocker toutes les valeurs
end

scf(2);
clf();
plot(x,v);
xlabel('Espace');
ylabel('Valeur');
title('Temps final, lambda='+ string(lambda));

scf(3);
clf();
t=ht*(0:Nt);
colorbar(min(U),max(U));
Sgrayplot(x,t,U');
xlabel('Espace');
ylabel('Temps');
title('Lignes de niveau de U, lambda='+ string(lambda));
```