**Université de Rennes** 2023-2024
Agrégation externe

---

**Compléments sur l'équation de transport**

Miguel Rodrigues

---

Ces notes de cours sont consacrées à l'équation de transport et aux équations de continuités/lois de conservation associées.

# 1 Équation de transport

## 1.1 Premières propriétés

On se donne trois temps $T_1 < t_0 < T_2$, un champs de vitesse $a : ]T_1, T_2[\times\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ et une donnée initiale réelle $u_0 : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$. On considère alors pour une inconnue réelle $u$ définie sur $]T_1, T_2[\times\mathbf{R}$ l'*équation de transport* associée

$$\partial_t u + a\partial_x u = 0\,, \qquad \text{sur } ]T_1, T_2[\times\mathbf{R} \tag{1.1}$$

complétée par la donnée initiale

$$u(t_0, \cdot) = u_0\,. \tag{1.2}$$

Dans un premier temps on suppose $u_0$ $\mathcal{C}^1$ et l'on cherche $u$ $\mathcal{C}^1$.
L'équation (1.1) exprime qu'en tout point de l'espace-temps $(t, x) \in ]T_1, T_2[\times\mathbf{R}$ la dérivée spatio-temporelle de $u$ est nulle dans la direction $(1, a)$.
Si $a$ est constant égal à $a_0 \in \mathbf{R}$, il est naturel de la résoudre en changeant de variable en remplaçant $u$ par $v$ lié par $v(s, y) = u(s, y + sa_0)$ de sorte que l'équation se récrit $\partial_s v = 0$ sur $]T_1, T_2[\times\mathbf{R}$. Cela se résout de manière unique en $v(s, y) = V(y)$ pour une certaine fonction $V$. En revenant à $u$, on déduit $u(t, x) = V(x - t\,a_0)$ pour tout $(t, x)$. En combinant avec (1.2) on déduit $V(x - t_0\,a_0) = u_0(x)$ pour tout $x$ donc $V(y) = u_0(y + t_0\,a_0)$ pour tout $y$. Ainsi (1.1)-(1.2) est équivalent à $u(t, x) = u_0(x - (t - t_0)\,a_0)$ pour tout $(t, x)$.
Généralisons au cas non constant. Supposons $a$ $\mathcal{C}^1$ avec $\partial_x a$ borné. Si $X : ]T_1, T_2[\to \mathbf{R}$ vérifie pour tout $s$, $X'(s) = a(s, X(s))$ et que $U : ]T_1, T_2[\to \mathbf{R}$ est défini à partir de $u$ par $U(s) := u(s, X(s))$, alors (1.1) implique que $U$ est constant et (1.2) donne sa valeur $U \equiv u_0(X(t_0))$. D'après le théorème de Cauchy–Lipschitz par tout point $(t, x)$ il passe une unique telle courbe, ce qui permet de déterminer $u(t, x)$ à partir de $u_0$. Pour le formaliser, introduisons

$$\Phi\ : ]T_1, T_2[\times]T_1, T_2[\times\mathbf{R} \to \mathbf{R}$$

le flot associé à $a$ avec la convention que $\Phi(t_f, t_i, x_i)$ note la valeur au temps $t_f$ de la solution partie de $x_i$ au temps $t_i$. L'argument ci-dessus donne que la seule solution de (1.1)-(1.2) est donnée par

$$u(t, x)\ =\ u_0(\Phi(t_0, t, x))\,. \tag{1.3}$$

Le théorème de régularité du flot permet de vérifier qu'effectivement la formule convient. On peut déduire (1.1) de (1.3) de deux manières

1. en généralisant l'argument de changement de variable du cas constant, c'est-à-dire en observant que $v$ défini par $v(s,y) = u(s,\Phi(s,t_0,y))$ vérifie $\partial_s v = 0$ ce qui implique (1.1) en tout $(s,\Phi(s,t_0,y))$, ce qui suffit à conclure parce que $\Phi(s,t_0,\cdot)$ est inversible ;
2. en dérivant directement (1.3) grâce au fait que

$$\partial_{t_i}\Phi(t_f,t_i,x_i) = -a(t_i,x_i)\,\partial_{x_i}\Phi(t_f,t_i,x_i)\,.$$

Le premier argument a l'avantage de ne pas utiliser d'information sur les dérivées du flot (à par celle par rapport à $t_f$ qui sert à définir le flot).
Les courbes $X$ utilisées ci-dessus sont appelées courbes caractéristiques de l'équation. La méthode de résolution associée est appelée méthode des caractéristiques.
Résumons ce que nous avons montré jusqu'ici.

**Théorème 1** *Supposons $a$ $\mathcal{C}^1$ avec $\partial_x a$ borné. Alors, pour tout $u_0$ $\mathcal{C}^1$, le problème de Cauchy* (1.1)-(1.2) *possède une unique solution $\mathcal{C}^1$ et cette solution est donnée par* (1.3).

Notons que

1. La dynamique est réversible, elle peut être résolue à la fois vers le futur, sur $]t_0,T_2[$, et vers le passé, sur $]T_1,t_0[$.
2. Si $a$ et $u_0$ sont en fait $\mathcal{C}^\infty$, alors la solution $u$ est $\mathcal{C}^\infty$.
3. On a propagation à vitesse finie. Si $u_0$ est à support compact $K$ alors $u(t,\cdot)$ a pour support le compact $\Phi(t,t_0,K)$. De manière plus quantitative, si $a$ est borné, alors $u(t,x)$ ne dépend des valeurs de $u_0$ sur $[x-|t-t_0|\|a\|_{L^\infty}, x+|t-t_0|\|a\|_{L^\infty}]$ et réciproquement la valeur $u_0(x)$ ne peut influencer les valeurs de $u(t,\cdot)$ que sur $[x-|t-t_0|\|a\|_{L^\infty}, x+|t-t_0|\|a\|_{L^\infty}]$.
4. Si pour un certain $X_{\rm per}>0$, $u_0$ est $X_{\rm per}\mathbf{Z}$-périodique et, pour tout $t$, $a(t,\cdot)$ l'est aussi, alors, pour tout $t$, $u(t,\cdot)$ l'est également.

## 1.2 Estimations $L^p$

La formule exacte donne immédiatement que pour tout $t$, $\|u(t,\cdot)\|_{L^\infty} = \|u_0\|_{L^\infty}$. Un changement de variable combiné avec la formule du jacobien du flot (triviale à démontrer en dimension 1) donne pour tout $1\leq p<\infty$, tout $t$

$$\|u(t,\cdot)\|_{L^p} \leq \mathrm{e}^{\frac{1}{p}|t-t_0|\,\|\partial_x a\|_{L^\infty}}\,\|u_0\|_{L^p}\,.$$

Alternativement on peut essayer de démontrer cette borne en justifiant, par exemple quand $u_0$ est à support compact et $p>1$,

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\int_{\mathbf{R}}|u(\cdot,x)|^p\,\mathrm{d}x\right)(t) &= \int_{\mathbf{R}}|u(t,x)|^{p-1}\,\mathrm{sign}(u(t,x))\,\partial_t u(t,x)\,\mathrm{d}x\\
&= -\int_{\mathbf{R}} p\,|u(t,x)|^{p-1}\,\mathrm{sign}(u(t,x))\,a(t,x)\,\partial_x u(t,x)\,\mathrm{d}x\\
&= -\int_{\mathbf{R}} a(t,x)\,\partial_x(|u|^p)(t,x)\,\mathrm{d}x\\
&= \int_{\mathbf{R}} \partial_x a(t,x)\,|u(t,x)|^p\,\mathrm{d}x\\
&\leq \|\partial_x a\|_{L^\infty}\,\|u(t,\cdot)\|_{L^p}^p\,.
\end{aligned}$$

**Remarque 2** *La version sur $\mathbf{R}^d$ (plutôt que sur $\mathbf{R}$) s'écrit $\partial_t u + a\cdot\nabla_x u = 0$ et l'essentiel des résultats se généralise immédiatement. Dans les estimations $L^p$, $\mathrm{div}(a)$ remplace $\partial_x a$.*

### 1.3 Équations inhomogènes

Pour passer de l'équation linéaire (1.1) à une version affine, nous allons utiliser une version du principe de Duhamel, aussi appelé principe de variation de la constante. Pour cela il est commode de noter $S(t_f, t_i)$ l'opérateur solution associé au théorème 1,

$$S(t_f, t_i)(u_0)(x) := u_0(\Phi(t_i, t_f, x))\,.$$

Pour $f : ]T_1, T_2[\times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, on considère

$$\partial_t u + a\partial_x u = f\,, \qquad \text{sur } ]T_1, T_2[\times\mathbf{R}\,. \tag{1.4}$$

**Théorème 3** *Supposons $a$ $\mathcal{C}^1$ avec $\partial_x a$ borné. Alors, pour tout $u_0$ et $f$ $\mathcal{C}^1$, le problème de Cauchy* (1.4)-(1.2) *possède une unique solution $\mathcal{C}^1$ et cette solution est donnée par, pour tout $t$,*

$$u(t,\cdot) \;=\; S(t,t_0)(u_0) \;+\; \int_{t_0}^{t} S(t,\tau)(f(\tau,\cdot))\,\mathrm{d}\tau\,.$$

On peut démontrer le théorème 3 avec des arguments habituels généraux. Mais il est plus efficace d'invoquer que si $X$ est un caractéristique et $U$ est défini à partir de $u$ par $U(s) := u(s, X(s))$, alors (1.4) implique, pour tout $s$, $U'(s) = f(s, X(s))$. En intégrant entre $t_0$ et $t$ avec $X(s) = \Phi(s, t_0, x)$, on déduit

$$S(t_0,t)(u(t,\cdot)) \;=\; u_0 \;+\; \int_{t_0}^{t} S(t_0,\tau)(f(\tau,\cdot))\,\mathrm{d}\tau\,.$$

En appliquant $S(t, t_0)$ on obtient la formule annoncée.

### 1.4 Problèmes à bord

La méthode des caractéristiques permet aussi de traiter des problèmes à conditions initiale et de bord. Cependant quand un bord est présent les courbes caractéristiques peuvent ne pas être définies sur tout l'intervalle de temps parce qu'elles touchent le bord. En particulier,

1. certaines courbes peuvent ne pas passer par un point où $t = t_0$, les valeurs transportées doivent alors venir du bord ;
2. certaines de ces courbes ne passant pas par un point où $t = t_0$, peuvent toucher plusieurs points du bord, et il faut alors qu'une seule contrainte de bord soit prescrite ;
3. certaines courbes peuvent passer à la fois par un point où $t = t_0$ et un ou plusieurs points du bord, aucune contrainte de valeur ne doit alors être prescrite en les points du bord en question.

Si trop de valeurs sont prescrites sur une même courbe caractéristique, le problème n'aura pas de solution. Si sur un ensemble ouvert de courbes aucune valeur n'est prescrite alors le problème aura trop de solutions.

Par ailleurs si les conditions de bord et initiale ne vérifient pas de bonnes conditions de compatibilité alors le problème peut ne pas avoir de solution régulière par incompatibilité à la frontière entre les zones dont les valeurs sont déterminées par le bord et celles où elles sont déterminées par les valeurs en $t = t_0$. Illustrons le calcul de solutions dans un cas bien posé où, de plus, le champs de vitesse est constant.

**Théorème 4** *Soit $x_1 < x_2$, $T_1 < t_0 < T_2$, et $a_0 > 0$. Alors, pour tout $u_0 : [x_1, x_2] \to \mathbf{R}$, $u_1 : [t_0, T_2[ \to \mathbf{R}$ et $u_2 : ]T_1, t_0] \to \mathbf{R}$ $\mathcal{C}^1$, vérifiant*

$$\begin{aligned} u_1(t_0) &= u_0(x_1)\,, & u_1'(t_0) + a_0\, u_0'(x_1) &= 0\,,\\ u_2(t_0) &= u_0(x_2)\,, & u_2'(t_0) + a_0\, u_0'(x_2) &= 0\,, \end{aligned}$$

*le problème*

$$\begin{aligned} \partial_t u + a_0 \partial_x u &= 0\,, & &\textit{sur } ]T_1, T_2[\times[x_1, x_2]\,,\\ u(t_0, \cdot) &= u_0\,, & &\textit{sur } [x_1, x_2]\,,\\ u(\cdot, x_1) &= u_1\,, & &\textit{sur } [t_0, T_2[\,,\\ u(\cdot, x_2) &= u_2\,, & &\textit{sur } ]T_1, t_0]\,, \end{aligned}$$

*possède une unique solution $\mathcal{C}^1$, $u : ]T_1, T_2[\times[x_1, x_2] \to \mathbf{R}$. De plus cette solution est donnée par*

$$u(t,x) \;=\; \begin{cases} u_0(x - (t - t_0)\,a_0) & \textit{si} \quad x_1 \leq x - (t-t_0)\,a_0 \leq x_2\,,\\ u_1\left(t - \frac{(x - x_1)}{a_0}\right) & \textit{si} \quad x - (t-t_0)\,a_0 \leq x_1\,,\\ u_2\left(t + \frac{(x_2 - x)}{a_0}\right) & \textit{si} \quad x - (t-t_0)\,a_0 \geq x_2\,. \end{cases}$$

# 2 Lois de conservation

## 2.1 Modélisation

L'équation arrive assez peu souvent dans des situations concrètes. Elle est en revanche liée à une forme d'équation arrivant souvent

$$\partial_t n + \partial_x(na) = 0\,, \qquad \text{sur } ]T_1, T_2[\times\mathbf{R}\,. \tag{2.1}$$

Comme nous tenterons de le justifier ci-dessous cette équation encode l'évolution d'une densité volumique d'une quantité par le seul effet dû au fait que les objets qui portent cette quantité se déplacent selon le champ de vitesse $a$.

Évidemment (1.1) et (2.1) coïncident quand $a$ est constant. Un autre lien très direct avec (1.1) est que si une densité volumique de masse $\rho$ et celle d'une autre quantité $\Sigma$ vérifient (2.1) alors la densité massique de cette même quantité $\sigma := \Sigma/\rho$ vérifie (1.1). Mais nous verrons d'autres liens ci-dessous.

Tentons d'abord de justifier l'interprétation de (2.1). L'équation est équivalente à pour tout $x_1 < x_2$, tout $t$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\int_{[x_1,x_2]} n(\cdot, x)\mathrm{d}x\right)(t) = -n(t, x_2)a(t, x_2) + n(t, x_1)a(t, x_1)\,,$$

ou encore à pour tout $x_1 < x_2$, pour tout $t_1 < t_2$

$$\int_{[x_1,x_2]} n(t_2, x)\,\mathrm{d}x = \int_{[x_1,x_2]} u(t_1, x)\,\mathrm{d}x + \int_{[t_1,t_2]} (n\,a)(t, x_2)\,\mathrm{d}t - \int_{[t_1,t_2]} (n\,a)(t, x_1)\,\mathrm{d}t\,.$$

Ces équations traduisent l'évolution de la densité dans le volume $[x_1, x_2]$.

Pour en fournir une interprétation plus concrète encore il est utile de relaxer la contrainte que l'on cherche une solution $n$ $\mathcal{C}^1$. Puisque $n$ est censé être une densité volumique il est naturel de considérer qu'en tout

$t$, $n(t,\cdot)$ est une mesure (pas nécessairement absolument continue). Si l'interprétation est justifiée alors une solution élémentaire de (2.1) devrait être donnée par

$$n(t,\cdot) \;=\; \sum_{j=1}^{M} n_j\, \delta_{x_j(t)}$$

où $\delta_y$ note la masse de Dirac en $y$, $M \in \mathbf{N}^\star$, et pour chaque $j$, $n_j \in \mathbf{R}$ et $x_j$ est une courbe caractéristique. Pour le vérifier supposons temporairement $a$ $\mathcal{C}^\infty$. Alors pour un tel $n$, on a que si $\varphi$ est une fonction $\mathcal{C}^\infty$ à support compact sur $\mathbf{R}$, en tout $t$

$$\langle n(t,\cdot);\varphi\rangle_{\mathcal{D}',\mathcal{D}} \;=\; \sum_{j=1}^{M} n_j\, \varphi(x_j(t))$$

ce qui donne en tout $t$

$$\langle \partial_t n(t,\cdot);\varphi\rangle_{\mathcal{D}',\mathcal{D}} \;=\; \sum_{j=1}^{M} n_j\, (a(t,\cdot)\,\varphi')(x_j(t)) \;=\; \langle n(t,\cdot); a(t,\cdot)\varphi'\rangle_{\mathcal{D}',\mathcal{D}} \;=\; -\langle \partial_x(n\,a)(t,\cdot);\varphi\rangle_{\mathcal{D}',\mathcal{D}}\,.$$

Il s'agit bien d'une forme faible de (2.1).

### 2.2 Résolution

**Théorème 5** *Supposons $a$ $\mathcal{C}^2$ avec $\partial_x a$ borné. Alors, pour tout $n_0$ $\mathcal{C}^1$, le problème de Cauchy* (2.1) *avec $n(t_0,\cdot) = n_0$ possède une unique solution $\mathcal{C}^1$ et cette solution est donnée par pour tout $(t,x)$*

$$n(t,x) \;=\; \mathrm{e}^{-\int_{t_0}^{t} \partial_x a(\tau,\Phi(\tau,t,x))\,\mathrm{d}\tau}\; n_0(\Phi(t_0,t,x))\,.$$

Une manière simple de démontrer le théorème est d'écrire l'équation sous la forme

$$\partial_t n + a\,\partial_x n \;=\; -(\partial_x a)\,n\,,$$

et d'observer que si $X$ est une caractéristique et $N$ est défini par $N(s) := n(s,X(s))$ alors $N'(s) = -\partial_x a(s,X(s))\,N(s)$. En intégrant entre $t_0$ et $t$ avec $X(s) = \Phi(s,t_0,x)$, on déduit

$$n(t,\Phi(t,t_0,x)) \;=\; \mathrm{e}^{-\int_{t_0}^{t} \partial_x a(\tau,\Phi(\tau,t_0,x))\,\mathrm{d}\tau}\; n_0(x)\,.$$

Une manière plus fondamentale de l'obtenir est d'utiliser la dualité entre (1.1)et (2.1). Si $n$ résout (2.1) et $u$ résout (1.1) alors $nu$ résout (2.1), ce qui s'intègre en

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\int_{\mathbf{R}} n(\cdot,x)\,u(\cdot,x)\,\mathrm{d}x\right) \equiv 0$$

pourvu que pour tout $t$, $u(t,\cdot)$ soit à support compact. Ainsi la solution $n$ du théorème vérifie, pour tout $\varphi$ $\mathcal{C}^\infty$ à support compact, pour tout $t$

$$\int_{\mathbf{R}} n(t,x)\,\varphi(x)\,\mathrm{d}x \;=\; \int_{\mathbf{R}} n_0(x)\,S(t_0,t)(\varphi)(x)\,\mathrm{d}x \;=\; \int_{\mathbf{R}} n_0(x)\,\varphi(\Phi(t,t_0,x))\,\mathrm{d}x\,.$$

D'où la formule par changement de variable.
Cette dualité permet aussi d'étendre le caractère bien posé à un cadre distributionnel. L'existence pour (1.1) dans un certain espace donne de l'unicité pour (2.1) dans son espace dual (avec un argument comme ci-dessus).

La dualité donne aussi pour tout $t$, $\|n(t,\cdot)\|_{L^1} = \|n_0\|_{L^1}$ et, pour tout $1 < p \leq \infty$ et tout $t$

$$\|n(t,\cdot)\|_{L^p} \leq \mathrm{e}^{\frac{1}{p'}|t-t_0|\,\|\partial_x a\|_{L^\infty}}\,\|n_0\|_{L^p}\,,$$

où $p'$ est l'indice de Lebesgue dual de $p$, c'est-à-dire $1/p + 1/p' = 1$. On peut évidemment montrer ces bornes directement, par un changement de variable à partir de la formule ou par une estimation d'énergie.

La préservation de la norme $L^1$ et de la positivité est cohérente avec la modélisation.