Université de Rennes 2023-2024

Agrégation externe

Compléments sur l'approximation numérique
de l'équation de transport

Miguel Rodrigues

Ces notes de cours sont consacrées à l'approximation numérique des solutions de l'équation de transport et des équations de continuités/lois de conservation associées. Une partie du matériel discuté ici peut être trouvé dans les livres classiques d'analyse numérique, notamment dans [Fil13, Chapitre 7].

1 Premiers commentaires

On cherche à calculer des approximations de solutions de

$$\partial_t u + a\partial_x u = f\,, \tag{1.1}$$

ou de

$$\partial_t n + \partial_x (na) = g\,, \tag{1.2}$$

où a est un champ de vitesse et les inconnues respectives sont u et n. Les équations doivent être complétées par des données initiales et, selon le domaine spatial, par des conditions de bord, adaptées au champ de vitesse.

Dans les problèmes les plus simples les termes sources et les champs de vitesse sont donnés, de sorte que le problème est affine et peut être analysé avec les outils de l'agrégation. Mais dans certains modèles ils sont donnés comme des fonctions de l'inconnue. Il ne faut pas hésiter à tester dans ces situations non linéaires des généralisations des schémas analysés dans les cas affines. Voici quelques remarques dans cette direction

1. Le cas où a est donné mais les sources sont des fonctions des inconnues peut encore être analysé à un niveau élémentaire. La méthode des caractéristiques ramène l'étude à un problème de systèmes d'équations différentielles ordinaires possiblement non linéaires.
2. En s'autorisant à faire dépendre f de u, on peut ainsi passer de (1.2) à (1.1) en posant $u = n$ $f = g - n\,\partial_x a$. Ce n'est raisonnable que quand a est donné. Si en revanche la vitesse de (1.2) est donnée par $a(t,x) = c(t,x,n(t,x))$, alors il vaut mieux récrire l'équation sous la forme (1.1) avec $u = n$, $f(t,x) = g(t,x) - n(t,x)\,\partial_x c(t,x,n(t,x))$ mais un champ de vitesse donné par $(t,x) \mapsto \partial_n \omega(t,x,n(t,x))$ où ω est défini à partir de c comme $(t,x,n) \mapsto n\,c(t,x,n)$. On notera que la vitesse $\partial_n\omega$ du transport de la densité n, appelée vitesse de groupe, n'est pas la vitesse c des objets élémentaires dont n est la densité (vitesse de phase) sauf si c ne dépend pas de n.

Il est important d'identifier les propriétés les plus importantes des équations pour essayer de les retrouver dans les schémas numériques. Pour (1.1), en l'absence de conditions de bord et de terme source, la norme L^∞ est conservée. Pour (1.2), en l'absence de conditions de bord et de terme source, la positivité (ou la négativité) de n est préservée et son intégrale (sur $\mathbf{R}$ quand n est intégrable, sur un intervalle fondamental

quand n est périodique) est conservée, ce qui implique que la norme L^1 adaptée est conservée (en utilisant la réversibilité).
On peut utiliser un schéma numérique lié à la méthode des caractéristiques. Typiquement dans l'approximation des solutions de (1.1) pour passer d'un temps discret t_n au temps suivant t_{n+1}

1. on calcule une approximation des positions au temps t_n de courbes caractéristiques partant en t_{n+1} de points x_j pris dans une grille spatiale ;
2. comme ces positions au temps t_n ne tombent a priori pas sur la grille spatiale il faut utiliser une méthode d'interpolation pour calculer une valeur au pied des caractéristiques à partir des valeurs déjà connues au temps t_n aux points de la grille.

Ce problème de grille spatiale arrive même avec un champ de vitesse constant sauf si les grilles spatiales et temporelles sont liées par le champ de vitesse. La méthode esquissée est appelée *méthode semi-lagrangienne*.
Pour (1.2) une méthode naturelle consiste à approcher la donnée initiale par une combinaison de masses de Dirac, puis à transporter celles-ci le long de courbes caractéristiques (approchées numériquement). Cela ne demande pas de grilles spatiales mais cela ne fournit une approximation qu'avec une régularité de type L^1/mesure. Pour résoudre cela on peut convoler avec une fonction régulière à support compact très petit (ce qui va épaissir les masses de Dirac). Cela introduit une erreur supplémentaire, avec petit paramètre la taille du support. La méthode esquissée ici est appelée *méthode particulaire*.
Les méthodes présentées brièvement ci-dessus sont fortement liées aux caractéristiques et donc difficilement généralisables à d'autres types d'équations (chaleur, Laplace,...). Nous allons nous focaliser sur un type de méthode plus robuste, la *méthode des différences finies*.

2 Méthode des différences finies

Le principe de la méthode des différences finies est d'approcher les dérivées partielles par des différences de valeurs aux points de la grille spatiale. Une fois que l'on a fait un choix d'approximation pour chacune des dérivées de l'équation, il faut encore décider comment définir les valeurs utilisées dans les formules qui dépassent du bord spatial.
Cela transforme des équations aux dérivées partielles en équations algébriques.

2.1 Analyses de stabilité

Nous ne fournissons une analyse complète que dans le cas où c'est relativement direct : coefficients constants, conditions de bord périodiques, points équidistants, normes L^2. Cela permet d'utiliser l'analyse de Fourier.
Pour faire au plus simple choisissons $a_0 \in \mathbf{R}$ et $u_0 : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ $\mathbf{Z}$-périodique. On note $u : \mathbf{R} \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ la solution de $\partial_t u + a_0 \partial_x u = 0$, $u(0,\cdot) = u_0$. Pour tout t, $u(t,\cdot)$ est $\mathbf{Z}$-périodique. De plus pour tout intervalle de temps I contenant 0, $u_{|I\times[0,1]}$ est caractérisé par

$$\begin{aligned} \partial_t u + a_0 \partial_x u &= 0\,, &\quad \text{sur } I \times [0,1]\,,\\ u(0,\cdot) &= u_0\,, &\quad \text{sur } [0,1]\,,\\ u(\cdot,0) &= u(\cdot,1)\,, &\quad \text{sur } I\,. \end{aligned}$$

On cherche à approcher $u_{|I\times[0,1]}$ avec $I=[0,T]$ où $T>0$ est fixé. Étant donnés des pas d'espace et de temps Δx et Δt tels que $N_x := 1/\Delta x \in \mathbf{N}^*$, on note N_t la partie entière de $T/\Delta t$ et on introduit les nœuds de subdivisions $x_j = j\Delta x$, $j\in [\![1,N_x]\!]$, et $t_n = n\Delta t$, $n\in [\![0,N_t]\!]$. On souhaite calculer u_j^n, des valeurs en (t_n,x_j) censées fournir une approximation des valeurs $u(t_n,x_j)$ de la solution. Insistons sur le fait que bien nous ne le marquions pas par des indices et des exposants, (u_j^n,t_n,x_j) ne dépendent pas que de (j,n) mais aussi de $(\Delta t,\Delta x)$ ou de manière équivalente de $(\Delta t, N_x)$.

2.1.1 Schémas décentrés

Commençons par discuter le schéma aux différences finies décentré à gauche

$$u_j^{n+1} = u_j^n - a_0\frac{\Delta t}{\Delta x}\left(u_j^n - u_{j-1}^n\right), \qquad j\in [\![1,N_x]\!], \qquad n\in [\![0,N_t-1]\!], \tag{DFg}$$

où les valeurs en dehors de $j\in [\![1,N_x]\!]$ sont obtenues par périodicité, $u_0^n := u_{N_x}^n$, et les valeurs initiales sont données par $u_j^0 := u_0(x_j)$.

Définition 1 *On dira que le schéma est L^2-stable s'il existe une constante C_T indépendante de U_0, Δt et Δx telle que la solution du schéma ci-dessus vérifie*

$$\frac{1}{\sqrt{N_x}}\,\|U^n\|_{\ell^2([\![1,N_x]\!])} \leq C_T\,\frac{1}{\sqrt{N_x}}\,\|U^0\|_{\ell^2([\![1,N_x]\!])}, \qquad 0\leq n\,\Delta t\leq T.$$

où $U^n := (u_1^n,\cdots,u_{N_x}^n)$.

La stabilité ci-dessus est formulée par rapport aux perturbations de la donnée initiale. On passe de celle-ci à de la stabilité par rapport aux termes sources par une formule de Duhamel discrète. C'est cette version de la stabilité qui est utile dans l'analyse de convergence.

Formulé autrement, si on écrit (DFg) sous forme matricielle $U^{n+1} = A\,U^n$ pour une certaine matrice A de taille $N_x\times N_x$ dépendant de Δt et Δx, on souhaite

$$\|A^n\|_{\ell^2\to\ell^2} \leq C_T, \qquad 0\leq n\leq \frac{T}{\Delta t}.$$

Remarque 2 *Écrivons la formule de Duhamel discrète à l'aide de A. Si $(U^n)_n$ résout pour tout n, $U^{n+1} = A\,U^n + F^{n+1}\,\Delta t$, alors pour tout n*

$$U^n = A^n\,U^0 + \sum_{\ell=1}^{n} A^{n-\ell}\,F^\ell\,\Delta t.$$

La transformée de Fourier discrète diagonalise A de manière presque isométrique. Introduisons

$$\mathcal{F}_{N_x}:\mathbf{C}^{N_x}\to\mathbf{C}^{N_x}, \quad (f_1,\cdots,f_{N_x})\longmapsto \left(\frac{1}{N_x}\sum_{j=1}^{N_x} f_j\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\,2\pi\,\frac{j}{N_x}}\right)_{k\in[\![-\lfloor\frac{N_x}{2}\rfloor, N_x-\lfloor\frac{N_x}{2}\rfloor-1]\!]}$$

et posons $C^n := \mathcal{F}_{N_x}(U^n)$. Alors

$$\|C^n\|_{\ell^2} = \frac{1}{\sqrt{N_x}}\,\|U^n\|_{\ell^2}$$

et (DFg) devient

$$C_k^{n+1} = \left(1 - a_0\,\frac{\Delta t}{\Delta x}\,\left(1 - e^{-\mathrm{i}k\,2\pi\,\Delta x}\right)\right)C_k^n, \qquad k\in[\![-\lfloor\tfrac{N_x}{2}\rfloor, N_x-\lfloor\tfrac{N_x}{2}\rfloor-1]\!], \qquad n\in[\![0,N_t-1]\!].$$

La condition de stabilité devient

$$\left|1 - a_0\,\frac{\Delta t}{\Delta x}\,\left(1 - e^{-\mathrm{i}k\,2\pi\,\Delta x}\right)\right|^n \leq C_T, \qquad k\in[\![-\lfloor\tfrac{N_x}{2}\rfloor, N_x-\lfloor\tfrac{N_x}{2}\rfloor-1]\!], \quad n\in[\![0,N_t-1]\!].$$

Remarque 3 *Dans beaucoup de livres de référence on propose plutôt de mener l'analyse d'un schéma pour une grille spatiale infinie. Le schéma ne peut évidemment pas être calculé numériquement en l'état. Rien n'empêche cependant de l'analyser. Cela correspond à supposer* u_0 *de carré intégrable plutôt que périodique, et à poser* $x_j = j\Delta x$, $j \in \mathbf{Z}$, *et* $U^n := (u_j^n)_{j\in\mathbf{Z}}$. *Plutôt qu'une transformée de Fourier discrète on applique à* U^n *l'inverse des séries de Fourier*

$$V^n(\zeta) \;=\; \sum_{j\in\mathbf{Z}} u_j^n\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi\, j\, \zeta}\,, \qquad \zeta \in [0,1]\,.$$

À titre d'exemple le schéma infini décentré à gauche devient

$$V^{n+1}(\zeta) = \left(1 - a_0\,\frac{\Delta t}{\Delta x}\,\left(1 - e^{-\mathrm{i}\,2\pi\,\zeta}\right)\right)\, V^n(\zeta)\,, \qquad \zeta \in [0,1], \qquad n \in [\![0, N_t - 1]\!]\,.$$

L'analyse de stabilité L^2 *correspondante, appelée* analyse de von Neumann, *se réduit à l'existence de* C_T *tel que*

$$\left|1 - a_0\,\frac{\Delta t}{\Delta x}\,\left(1 - e^{-\mathrm{i}\,2\pi\,\zeta}\right)\right|^n \leq C_T\,, \qquad\qquad n \in [\![0, N_t]\!]\,, \quad \zeta \in [0,1]\,.$$

Pour continuer l'analyse il est commode de fixer $\lambda := \Delta t/\Delta x$. On montre alors que si $a_0 < 0$ et $N_x \geq 2$,

$$\max_{k\in[\![-\lfloor\frac{N_x}{2}\rfloor, N_x - \lfloor\frac{N_x}{2}\rfloor - 1]\!]} \left|1 - a_0\,\lambda\,\left(1 - e^{-\mathrm{i}\frac{k}{N_x}\,2\pi}\right)\right| \geq |1 - a_0\,\lambda| = 1 + |a_0|\,\lambda$$

de sorte que

$$\max_{k\in[\![-\lfloor\frac{N_x}{2}\rfloor, N_x - \lfloor\frac{N_x}{2}\rfloor - 1]\!]} \left|1 - a_0\,\lambda\,\left(1 - e^{-\mathrm{i}\frac{k}{N_x}\,2\pi}\right)\right|^{\lfloor\frac{N_x\,T}{\lambda}\rfloor} \geq (1 + |a_0|\,\lambda)^{\lfloor\frac{N_x\,T}{\lambda}\rfloor} \overset{N_x\to\infty}{\longrightarrow} +\infty\,.$$

Si $a_0\lambda > 1$, on montre que

$$\max_{\zeta\in\mathbf{R}} \left|1 - a_0\,\lambda\,\left(1 - e^{\mathrm{i}\zeta}\right)\right| = 2a_0\,\lambda - 1$$

ce qui implique pour n'importe quel $1 < \mu < 2a_0\,\lambda - 1$, quand N_x est suffisamment grand

$$\max_{k\in[\![-\lfloor\frac{N_x}{2}\rfloor, N_x - \lfloor\frac{N_x}{2}\rfloor - 1]\!]} \left|1 - a_0\,\lambda\,\left(1 - e^{-\mathrm{i}\frac{k}{N_x}\,2\pi}\right)\right|^{\lfloor\frac{N_x\,T}{\lambda}\rfloor} \geq \mu^{\lfloor\frac{N_x\,T}{\lambda}\rfloor} \overset{N_x\to\infty}{\longrightarrow} +\infty\,.$$

Ainsi on conclut à l'instabilité quand $a_0\,\lambda \notin [0,1]$. Réciproquement, quand $a_0\,\lambda \in [0,1]$, on conclut à la stabilité avec $C_T = 1$ par simple inégalité triangulaire.
La condition

$$0 \leq a_0\,\lambda \leq 1\,,$$

est connue comme *condition de Courant–Friedrichs–Lewy.*
Pour le schéma décentré à droite la condition de stabilité est $-1 \leq a_0\,\lambda \leq 0$. Pour unifier les deux, quand $a_0 \geq 0$ (respectivement quand $a_0 \leq 0$) on appelle schéma décentré amont le schéma décentré à gauche (respectivement à droite), le schéma décentré à droite (respectivement à gauche). Ainsi quand $a_0 \neq 0$, le schéma décentré aval est toujours instable alors que le schéma décentré amont est stable sous la condition $|a_0|\lambda \leq 1$.
Ces conclusions sont cohérentes avec la direction et la vitesse de propagation de l'équation continue : au niveau discret il faut propager l'information dans la même direction que celle-ci et pas plus vite qu'elle.

2.1.2 Schémas centrés

Le schéma décentré aval présente l'inconvénient de demander de connaître le signe de la vitesse.
Considérons le schéma centré le plus simple

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{1}{2} a_0 \frac{\Delta t}{\Delta x}\left(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n\right)\,, \qquad j \in [\![1, N_x]\!], \qquad n \in [\![0, N_t - 1]\!]\,, \tag{DFc}$$

où les valeurs en dehors de $j \in [\![1, N_x]\!]$ sont obtenues par périodicité, $u_0^n := u_{N_x}^n$, $u_{N_x+1}^n := u_1^n$.
Une analyse de Fourier discrète donne comme condition de stabilité L^2

$$\left|1 - \mathrm{i}\, a_0 \frac{\Delta t}{\Delta x} \sin\left(k\, 2\pi\, \Delta x\right)\right|^n \leq C_T\,, \qquad n \in [\![0, N_t]\!]\,, \quad k \in [\![-\lfloor \tfrac{N_x}{2} \rfloor, N_x - \lfloor \tfrac{N_x}{2} \rfloor - 1]\!]\,.$$

À $\lambda := \Delta t/\Delta x$ fixé, on a

$$\max_{\zeta \in \mathbf{R}} |1 - i a_0\, \lambda\, \sin(\zeta)| = \sqrt{1 + a_0^2\, \lambda^2}$$

et ce maximum est strictement plus grand que 1 si $a_0 \neq 0$. On en déduit l'instabilité en procédant comme ci-dessus.
En revanche, on peut utiliser des schémas centrés plus élaborés. Citons-en deux classes.

1. Le schéma de Lax-Friedrichs de paramètre $\theta \in [0, 1]$

$$u_j^{n+1} \;=\; \theta\, u_j^n + (1-\theta) \frac{u_{j-1}^n + u_{j+1}^n}{2} - \frac{1}{2} a_0 \frac{\Delta t}{\Delta x}\left(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n\right)\,,$$

   est stable à $\lambda := \Delta t/\Delta x$ fixé sous la condition CFL $|a_0|\lambda \leq 1 - \theta$.

2. Le schéma de Lax-Wendroff

$$u_j^{n+1} \;=\; u_j^n - \frac{1}{2} a_0 \frac{\Delta t}{\Delta x}\left(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n\right) + \frac{1}{2} a_0^2 \frac{(\Delta t)^2}{(\Delta x)^2}\left(u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n\right)\,,$$

   est stable à $\lambda := \Delta t/\Delta x$ fixé sous la condition $|a_0|\lambda \leq 1$.

2.2 Analyse de convergence

Pour compléter l'analyse des cas stables il faut mener une analyse de consistance.
Pour cela notons $\mathcal{U}_j^n := u(t^n, x_j)$ et $\mathcal{U}^n := (\mathcal{U}_j^n)_j$, puis posons

$$\varepsilon_j^n := \frac{\mathcal{U}_j^{n+1} - \mathcal{U}_j^n}{\Delta t} - a_0 \frac{\mathcal{U}_j^n - \mathcal{U}_{j-1}^n}{\Delta x}\,, \qquad j \in [\![1, N_x]\!], \qquad n \in [\![0, N_t - 1]\!]\,.$$

On dira que le schéma est L^2-consistant si

$$\sum_{n=0}^{N_T - 1} \|(\varepsilon_j^n)_j\|_{\ell^2} \sqrt{\Delta x}\, \Delta t$$

tend vers zéro lorsque $(\Delta t, \Delta x)$ tend vers $(0, 0)$.
Il n'y a pas de terminologie canonique pour ce que l'on appelle erreur de consistance, notamment sur la question de la factorisation du Δt, ou sur la considération d'une erreur ponctuelle plutôt qu'une norme de celle-ci en espace ou en espace-temps. Notons qu'en temps la formulation de Duhamel indique que la norme naturelle est une norme L^1.
Posons $(\mathcal{C}_k^n)_k := \mathcal{F}_{N_x}(\mathcal{U}^n)$. Alors

$$\|(\varepsilon_j^n)_j\|_{\ell^2} \sqrt{\Delta x} \;=\; \left\| \left(\frac{\mathcal{C}_k^{n+1} - \left(1 - a_0\, \frac{\Delta t}{\Delta x}\, \left(1 - e^{-\mathrm{i}\, 2\pi\, k\, \Delta x}\right)\right) \mathcal{C}_k^n}{\Delta t} \right)_k \right\|_{\ell^2}.$$

Si $(c_k(\cdot))_{k\in\mathbf{Z}}$ note les coefficients de Fourier d'une fonction $\mathbf{Z}$-périodique, on peut continuer l'analyse de convergence en notant que pour des constantes C, C', C'' indépendantes de n, u_0, Δt et Δx,

$$\begin{aligned}
\|(\varepsilon_j^n)_j\|_{\ell^2}\sqrt{\Delta x} \leq C\,\left(\frac{1}{\Delta t}+\frac{1}{\Delta x}\right)&\Big(\|(\mathcal{C}_k^n - c_k(u(t^n,\cdot)))_{k\in[\![-\lfloor\frac{N_x}{2}\rfloor,N_x-\lfloor\frac{N_x}{2}\rfloor-1]\!]}\|_{\ell^2}\\
&+\|(\mathcal{C}_k^{n+1} - c_k(u(t^{n+1},\cdot)))_{k\in[\![-\lfloor\frac{N_x}{2}\rfloor,N_x-\lfloor\frac{N_x}{2}\rfloor-1]\!]}\|_{\ell^2}\Big)\\
&+C\left\|\left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,2\pi\,k\,a_0\,\Delta t}-\left(1-a_0\,\frac{\Delta t}{\Delta x}\,\left(1-e^{-\mathrm{i}\,2\pi\,k\,\Delta x}\right)\right)}{\Delta t}c_k(u(t^n,\cdot))\right)_{k\in[\![-\lfloor\frac{N_x}{2}\rfloor,N_x-\lfloor\frac{N_x}{2}\rfloor-1]\!]}\right\|_{\ell^2}\\
\leq C'\,\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}+1\right)\,\Delta x\,&\left(\|\partial_x^2 u(t^n,\cdot)\|_{L^2}+\|\partial_x^2 u(t^{n+1},\cdot)\|_{L^2}\right)\\
&+C'\,(\Delta t+\Delta x)\,\|(k^2\,c_k(u(t^n,\cdot))\|_{\ell^2}\\
\leq C''\,\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}+1\right)\,&(\Delta t+\Delta x)\,\|u_0''\|_{L^2}\,.
\end{aligned}$$

Attention : nous avons utilisé implicitement la périodicité de u_0, essentiellement que $u_0(0)=u_0(1)$ et $u_0'(0)=u_0'(1)$. La partie de l'estimation comparant Fourier discret et Fourier peut être rendue arbitrairement petite, la limitation de l'ordre vient du développement de

$$\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,2\pi\,k\,a_0\,\Delta t}-\left(1-a_0\,\frac{\Delta t}{\Delta x}\,\left(1-e^{-\mathrm{i}\,2\pi\,k\,\Delta x}\right)\right)}{\Delta t}\,.$$

Alternativement on peut mener l'analyse d'erreur de consistance directement en espace plutôt qu'en Fourier. Dans ce cas les formules de Taylor remplacent les développements des monômes trigonométriques et l'on a intérêt à majorer l'erreur L^2 par l'erreur L^∞ en commençant par noter que $\|(\varepsilon_j^n)_j\|_{\ell^2}\sqrt{\Delta x}\leq \|(\varepsilon_j^n)_j\|_{\ell^\infty}$. On obtient alors des résultats analogues avec des normes $\|u_0''\|_{L^\infty}$.
En combinant stabilité et consistance on déduit alors un résultat de convergence à l'ordre un en temps et en espace sous condition CFL grâce au fait que par définition $\mathcal{U}^0=U^0$ et pour tout $n\in[\![0,N_t-1]\!]$

$$\mathcal{U}^{n+1}-U^{n+1}=A\,(\mathcal{U}^n-U^n)+\Delta t\,(\varepsilon_j^n)_j\,.$$

Proposition 4 *Il existe une constante C' ne dépendant que de a_0 et T telle que si*[1] *u_0 est $\mathbf{Z}$-périodique et $\mathcal{C}^2$, et $a_0>0$*

$$\|\mathcal{U}^n-U^n\|_{\ell^2}\,\sqrt{\Delta x}\;\leq\;C'\,\|u_0''\|_{L^2([0,1])}\,(\Delta t+\Delta x)\,,\qquad 0\leq n\,\Delta t\leq T\,,\quad \Delta x\leq|a_0|\,\Delta t\,.$$

Notre démonstration donne une dépendance linéaire en T pour C'.
En procédant de même on montre que sous des conditions CFL adéquates le schéma de Lax-Friedrichs converge à l'ordre 1 en espace et en temps alors que le schéma de Lax-Wendroff converge à l'ordre 2 en espace et en temps.

2.3 Généralisations

Retournons au cas où a est non constant pour écrire un schéma amont. Supposons que partout a soit strictement positif et contraignons Δt et Δx par $\Delta t\leq\Delta x\,\inf a$.
Pour simuler (1.1) on peut utiliser

$$u_j^{n+1}=u_j^n-a(t^n,x_j)\frac{\Delta t}{\Delta x}\left(u_j^n-u_{j-1}^n\right)+\Delta t\,f(t^n,x_j)$$

1. Ou plus généralement si $(u_0)_{|[0,1]}\in H^2_{\text{pér}}([0,1])$.

et pour (1.2)

$$N_j^{n+1} = N_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \big(a(t^n, x_j)\, N_j^n - a(t^n, x_{j-1}) N_{j-1}^n \big) + \Delta t\, g(t^n, x_j)\,.$$

La condition CFL assure aussi [2] un contrôle de la norme L^∞ pour la discrétisation de (1.1) parce que u_j^{n+1} est donné comme une combinaison convexe de u_j^n et u_{j-1}^n. Cela permet de mener une analyse complète de convergence L^∞ sous la condition CFL $\Delta t \leq \Delta x \inf a$. En revanche, ifl est difficile de déterminer si cette condition est nécessaire.

Pour la discrétisation de (1.2) on obtient [3] un contrôle de l'intégrale discrète par sommation télescopique.

Références

[Fil13] F. Filbet. *Analyse numérique - Algorithme et étude mathématique.* Dunod, 2013.

2. Pourvu que les bords soient correctement discrétisés.
3. Pourvu que les bords soient correctement discrétisés.