Complément sur la Leçon 265

Préparation Agrégation de Mathématiques
Université de Rennes 1
Isabelle Gruais

19 octobre 2020

Fonction ζ :

Equation fonctionnelle

Soit

$$\Omega = \{z \in \mathbb{C},\ \mathrm{Re}(z) > 1\}$$

On a :

$$\forall z \in \Omega, \quad \zeta(z)\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} \frac{t^{z-1}}{e^t - 1} dt.$$

Démonstration. Les deux membres de l'égalité sont bien définis sur Ω.

Soit $z \in \Omega$ et soit $x = \mathrm{Re}(z)$. On a :

$$\int_0^{+\infty} \left| \frac{t^{z-1}}{e^t - 1} \right| dt \leq \int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{e^t - 1} dt.$$

On a : $\forall n \geq 1$,

$$\frac{1}{n^x}\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{n^x} e^{-t} dt \underset{t=ns}{=} \int_0^{+\infty} s^{x-1} e^{-ns} ds$$

On a : $\forall s > 0$, $\forall N \geq 1$,

$$\sum_{n \geq 1} e^{-ns} = \frac{e^{-Ns}}{1 - e^{-s}} = \frac{e^{-(N-1)s}}{e^s - 1} \leq \frac{1}{e^s - 1}$$

avec :

$$t \mapsto \frac{s^{x-1}}{e^s - 1} \in L^1(0, +\infty), \quad \lim_{N \to +\infty} \frac{e^{-(N-1)s}}{e^s - 1} = 0.$$

Du Théorème de convergence dominée, on déduit que

$$\lim_{N \to +\infty} \int_0^{+\infty} s^{x-1} \frac{e^{-(N-1)s}}{e^s - 1} ds = 0.$$

De plus : $\forall s > 0$,

$$\forall s > 0, \quad \forall n \geq 0, \quad e^{-ns} > 0 \quad \text{et} \quad \forall N \geq 1, \quad \frac{e^{-(N-1)s}}{e^s - 1} > 0.$$

Du Théorème de Fubini-Tonelli, on déduit que

$$\lim_{N \to +\infty} \sum_{n \geq N} \int_0^{+\infty} s^{x-1} e^{-ns} ds = \lim_{N \to +\infty} \int_0^{+\infty} s^{x-1} \frac{e^{-(N-1)s}}{e^s - 1} ds = 0$$

Il en résulte que la série de terme général $\int_0^{+\infty} s^{z-1} e^{-ns} ds$ est absolument convergente de somme

$$\sum_{n \geq 1} \int_0^{+\infty} s^{z-1} e^{-ns} ds = \int_0^{+\infty} \sum_{n \geq 1} s^{z-1} e^{-ns} ds = \int_0^{+\infty} \frac{s^{z-1}}{e^s - 1} ds.$$

l'intégrale du membre de droite étant absolument convergente. $\square$