Cours - TD 2 : Fonctions holomorphes et méromorphes

1 Singularités

1.1 Typologie des singularités

Exercice 1.1.1 Exemples

Citer une fonction f ayant

i une singularité isolée en 0.

ii des singularités sur toute la demi-droite $\{te^{i\theta}, t \geq 0\}$ où $\theta \in \mathbb{R}$ est donné.

iii des singularités sur tout le cercle $C(0,1)$.

iv des singularités isolées en tous les entiers $n \geq 0$.

Définition 1.1.2. Typologie des singularités isolées

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$, $a \in \Omega$ et $f \in H(\Omega \backslash \{a\})$. Le point a est alors une singularité isolée de f.

i a est une singularité effaçable si f se prolonge en une fonction holomorphe sur Ω ;

ii a est un pôle s'il existe un entier $m \geq 1$ tel que $z \mapsto (z-a)^m f(z)$ soit holomorphe sur Ω ;

iii a est une singularité essentielle sinon.

Théorème 1.1.3. Casorati, Weierstrass

Soit a une singularité isolée de f. On a équivalence entre :

i a est une singularité essentielle de f ;

ii pour tout voisinage $V \subset \Omega$ de a, l'image de $V \backslash \{a\}$ est dense dans $\mathbb{C}$;

iii il existe une suite $(z_n) \subset \Omega \backslash \{a\}$ telle que $z_n \to a$ et la suite $(f(z_n))$ n'a pas de limite dans $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$.

Exercice 1.1.4 Vrai ou faux ?

Vrai ou faux ? Si a est une singularité isolée de f et $\lim_{z\to a} |f(z)| = +\infty$, alors a est un pôle de f.

Exercice 1.1.5 Nature des singularités

Préciser la nature des singularités isolées des fonctions suivantes.

$$f(z) = \frac{z}{\sin z}, \qquad g(z) = z \sin\frac{1}{z}, \qquad h(z) = \frac{1}{z^2-1}\cos\left(\frac{\pi z}{z+1}\right).$$

Exercice 1.1.6 Séries de Laurent

Calculer le développement en puissances de z des fonctions suivantes

$$f(z) = \frac{1}{z^2-1}, \text{ dans } D(0,1).$$

$$f(z) = \frac{1}{1-z^2} + \frac{1}{3-z}, \text{ dans } \{1 < |z| < 3\}.$$

$$f(z) = \exp\left(\frac{1}{1-z}\right) \text{ dans } \mathbb{C}\backslash\{1\} \text{ puis dans } \{|z| > 1\}.$$

Exercice 1.1.7 Condition de Blaschke [2]

Soit D le disque unité, et $f \in H(D)$, bornée, non identiquement nulle. On note (a_n) la suite des zéros de f, comptés avec multiplicité. Le but de l'exercice est de montrer qu'on a $\sum_n (1-|a_n|) < \infty$ (condition de Blaschke).

i On suppose la suite (a_n) infinie. Justifier que $\lim_n |a_n| = 1$.

ii Pour $z \in \bar{D}$ et $N > 0$, on pose

$$B_N(z) = \prod_{n=0}^{N} \frac{a_n - z}{1 - \bar{a}_n z}.$$

Montrer que cette fonction est bien définie et continue sur $\bar{D}$, holomorphe sur D, et telle que f/B_N est holomorphe sur D. Que vaut $|B_N(z)|$ en un point du cercle ?

iii $N > 0$ étant fixé, on choisit $r > \max(|a_n|, 0 \le n \le N)$. Justifier que

$$\frac{|f(0)|}{|B_N(0)|} \le \|f\|_\infty.$$

Indication : on pourra appliquer le principe du maximum sur le disque de rayon r et faire tendre r vers 1.

iv Calculer $B_N(0)$. En déduire que $\sum \log|a_n|$ converge, puis finalement que $\sum(1-|a_n|)$ converge.

1.2 Fonctions méromorphes

Définition 1.2.1. Fonction méromorphe

On appelle fonction méromorphe dans Ω une fonction f holomorphe dans $\Omega \backslash S$, où S est un *fermé discret* de Ω, telle que les singularités de f aux points de S sont toutes des pôles.

Exercice 1.2.2 Vrai ou faux ?

Vrai ou faux ? Une fonction holomorphe sur $\Omega \backslash S$, où $S \subset \Omega$, ayant un pôle en chaque point de S, est méromorphe sur Ω.

1.3 Résidus

Définition 1.3.1. Résidu

Soit f holomorphe sur $\Omega \backslash \{a\}$. Alors f est développable en série de Laurent sur tout disque épointé de centre a, inclus dans Ω,

$$f(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} c_{-n}(z-a)^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n.$$

On définit $res_a f = c_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_C f(z)dz$, où C est le bord d'un disque fermé de centre a et inclus dans Ω.

Exercice 1.3.2 Calcul de résidus

i L'application $z \mapsto \cot(\pi z) := \dfrac{\cos(\pi z)}{\sin(\pi z)}$ est-elle méromorphe sur $\mathbb{C}$? Déterminer ses résidus en chaque singularité.

ii Calculer les résidus en tous les pôles de

$$f(z) = \frac{z^2}{z^4+1} \text{ et } g(z) = \frac{z^2+z+5}{z(z^2+1)^2}.$$

Proposition 1.3.3. Règles de calcul

Si a est un pôle d'ordre 1, alors

$$res_a f = \lim_{z \to a} (z-a) f(z).$$

En particulier, si $f = g/h$ avec g et h holomorphes au voisinage de a, $h(a) = 0$, $h'(a) \neq 0$, $g(a) \neq 0$, alors

$$res_a f = \frac{g(a)}{h'(a)}.$$

Si a est un pôle d'ordre m de f et si g est un prolongement holomorphe de $(z-a)^m f(z)$, alors

$$res_a f = \frac{1}{(m-1)!} g^{(m-1)}(a).$$

Théorème 1.3.4. Théorème des résidus

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ et soit γ un chemin fermé homotope à un point dans Ω. Soit $f \in H(\Omega \backslash S)$ avec $S \subset \Omega \backslash \gamma^*$ sans point d'accumulation. Alors

$$\int_\gamma f dz = 2i\pi \sum_{a \in S \cap Int(\gamma)} Ind_\gamma(a) Res(f, a).$$

Corollaire 1.3.5. Principe de l'argument

Si Ω connexe et f méromorphe non constante dans Ω, si γ est un chemin fermé simple C^1 par morceaux dans Ω, tel que f n'ait ni zéro ni pôle sur γ^*. Alors

$$\frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)} dz = Z - P,$$

où Z désigne le nombre de zéros dans $Int(\gamma)$ (avec multiplicité) et P désigne le nombre de pôles dans $Int(\gamma)$ (avec multiplicité).

Corollaire 1.3.6. Théorème de Rouché

Soient Ω connexe et f, g holomorphes non constantes dans Ω, soit γ un chemin fermé C^1 par morceaux, homotope à un point. On suppose

$$\forall z \in \gamma^*, |f(z) - g(z)| < |f(z)|.$$

Alors f et g ont le même nombre de zéros dans $Int\gamma$ (avec multiplicité).

Exercice 1.3.7 Calculs d'intégrale [3]
Calculer les intégrales ci-dessous par la méthode des résidus.

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{a+\sin t}, \quad \int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^6}, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx, \quad \int_0^{\infty} \frac{dx}{x^\alpha (1+x)}, \ 0<\alpha<1, \quad \int_0^{\infty} \frac{\log x}{(1+x)^3} dx.$$

2 Espaces de fonctions holomorphes

2.1 Suite de fonctions holomorphes

Théorème 2.1.1. (Weierstrass) [5]

Soit $f_n \in H(\Omega), n \in \mathbb{N}$, et f telle que f_n converge vers f uniformément sur tout compact de Ω. Alors $f \in H(\Omega)$ et f_n' converge vers f' uniformément sur tout compact de Ω.

(Preuve : Morera et estimations de Cauchy)

Exercice 2.1.2 Théorème de Hurwitz [6], page 210.
Montrer que sur un ouvert connexe, une limite uniforme sur tout compact d'une suite de fonctions holomorphes injectives est soit injective, soit constante.
Indication : utiliser le théorème de Rouché.

2.2 Familles normales et topologie sur $H(\Omega)$

Définition 2.2.1. Famille normale [5]

Soit $\mathcal{F} \subset H(\Omega)$, où Ω ouvert connexe. On dit que $\mathcal{F}$ est une famille normale si toute suite d'éléments de $\mathcal{F}$ contient une sous-suite qui converge uniformément sur les compacts de Ω. (On n'exige pas que la fonction limite appartienne à $\mathcal{F}$.) Autrement dit, $\mathcal{F}$ est relativement compacte pour la topologie de la convergence uniforme sur tout compact.

Théorème 2.2.2. Critère de normalité de Montel [5]

Soit $\mathcal{F} \subset H(\Omega)$, uniformément bornée sur tous les compacts de Ω. Alors $\mathcal{F}$ est une famille normale.

(Preuve : formule de Cauchy et théorème d'Arzela-Ascoli.)

On munit $H(\Omega)$ de la topologie de la convergence uniforme sur tout compact de Ω, i.e. la topologie associée à la famille de semi-normes

$$p_K(f) = \sup_{z \in K} |f(z)|, \ K \text{ compact de } \Omega.$$

Cette topologie est métrisable. Pour cette topologie, le théorème de Montel montre que les compacts de $H(\Omega)$ sont les fermés bornés. En particulier, $H(\Omega)$ n'est pas normable pour cette topologie.

Exercice 2.2.3 Fonctions univalentes [6], page 254

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$, une fonction $f : \Omega \to \mathbb{C}$ est dite univalente si elle est holomorphe et injective sur Ω. On considère $\Omega \subset D(0,1)$, un ouvert connexe contenant l'origine, et on note

$$\mathcal{B}(\Omega) = \{f : \Omega \to D(0,1), \ f \text{ univalente dans } \Omega, f(0) = 0, \ |f'(0)| \geq 1\}.$$

Montrer que $\mathcal{B}(\Omega)$ est un sous-ensemble compact de $H(\Omega)$.
Indication : utiliser le théorème de Hurwitz.

3 Exercices d'application

Exercice 3.0.1 Prolongements de fonctions holomorphes [2]

i **Principe de réflexion de Schwarz**
Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$, symétrique par rapport à l'axe des réels. On note

$$\Omega^+ = \Omega \cap \{z \in \mathbb{C}, \mathrm{Im}(z) > 0\}.$$

Soit $f \in H(\Omega^+)$. On suppose que f se prolonge par continuité sur $\Omega \cap \mathbb{R}$, et $f(x) \in \mathbb{R}$, si $x \in \mathbb{R}$. En déduire que f se prolonge en une fonction holomorphe sur Ω entier.

ii Soit $\alpha < \frac{\pi}{2}$ et S_α le secteur défini par $|Arg(z)| < \alpha$. Soit f une fonction continue sur $S_\alpha \cap \bar{\Delta}$, holomorphe sur $S_\alpha \cap \Delta$, et telle que f prend des valeurs réelles en tout point de $S_\alpha \cap \partial\Delta$. Montrer que f se prolonge en une fonction holomorphe sur S_α.

Exercice 3.0.2 Inégalité de Bernstein [2] (exo 4.47)

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$. On note $\|P\|_\infty = \sup\{|P(z)|, |z| = 1\}$.

i On suppose ici que $\|P\|_\infty = 1$ et on note n le degré de P. Montrer que pour $|z| \geq 1$, $|P(z)| \leq |z|^n$. (On pourra introduire le polynôme $P^* = X^n P(1/X)$.

ii En déduire que si $\lambda > 1$ alors $Q = P - \lambda X^n$ a toutes ses racines dans Δ.

iii Justifier que les racines de Q' sont dans l'enveloppe convexe des racines de Q.

iv Déduire des questions précédentes que pour tout $P \in \mathbb{C}[X]$, $\|P'\|_\infty \leq n\|P\|_\infty$.

References

[1] J. M. Arnaudiès, H. Fraysse, Cours de mathématiques, T3, Compléments d'analyse, Dunod Université, 1989.

[2] E. Amar, E. Matheron, Analyse complexe, Cassini, 2004.

[3] H. Cartan, Théorie élémentaire des fonctions analytiques d'une ou plusieurs variables complexes, Hermann, 1975.

[4] R. Remmert, Theory of complex functions, Springer, 1998.

[5] W. Rudin, Real and complex analysis, Mc Graw Hill.

[6] A. Yger, Analyse complexe, Ellipses, 2014.