Préparation Agrégation de Mathématiques
Année 2020–2021

Leçon 266

Exercice 1

Soit X une va t.q. $\mathbb{E}(X_+) = +\infty$ et $\mathbb{E}(X_-) < +\infty$. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de va iid de même loi que X. On pose

$$S_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k$$

1. Montrer que
$$(S_n)_- \underset{n\to+\infty}{\overset{p.s.}{\to}} \mathbb{E}(X_-)$$

2. On suppose que $X_n \geq 0$ p.s., $\forall n \geq 1$.

   (a) Montrer que
   $$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}(\min(X,n)) = \mathbb{E}(X) = +\infty.$$

   (b) Montrer que:
   $$\forall p \in N, \quad \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \min(X_k,p) \underset{n\to+\infty}{\overset{p.s.}{\to}} \mathbb{E}(\min(X,p)).$$

   (c) Soit $A > 0$. Montrer que
   $$\liminf_{n\to+\infty} S_n \geq A \quad \text{p.s.} \quad .$$

   (d) En déduire que p.s.:
   $$\forall A \in \mathbb{N} \quad \liminf_{n\to+\infty} S_n \geq A$$

3. Montrer que
$$S_n \underset{n\to+\infty}{\overset{p.s.}{\to}} +\infty.$$

Exercice 2

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de va iid suivant la loi de Poisson de paramètre 1.

1. Montrer que
$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\frac{\sum_{k=1}^n X_k - n}{\sqrt{n}} \leq 0\right) = \frac{1}{2}.$$
2. Appliquer le TCL pour trouver la limite de la suite de terme général:
$$e^{-n}\sum_{k=0}^{n}\frac{n^k}{k!}.$$

Exercice 3

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de va indépendantes de loi $\mathcal{E}(\lambda)$, $\lambda > 0$.

1. Montrer que
$$\frac{1}{\ln n}\max_{1\leq k\leq n} X_k \underset{n\to+\infty}{\overset{\mathbb{P}}{\to}} \frac{1}{\lambda}$$
2. Montrer que la suite de terme général
$$\max_{1\leq k\leq n} X_k - \frac{\ln n}{\lambda}$$
converge en loi vers une limite à déterminer.