

Séries de Fourier

Bachir Bekka

Prépa Agreg, Compléments de cours, 2021

Plan

- 1 I. Convolution sur le cercle unité
- 2 II. Séries de Fourier
- 3 III. Théorie L^2 des séries de Fourier
- 4 IV. Quelques liens entre analyse complexe et séries de Fourier
- 5 V. Quelques applications des séries de Fourier

Quelques dates et quelques acteurs

- Fourier 1820 : introduction des séries de Fourier dans le traité “Théorie Analytique de la Chaleur”
- Dirichlet 1829 : démonstration du théorème qui porte son nom
- Poisson 1830 : introduction et étude du noyau de Poisson
- Dubois-Raymond 1873 : construction d’une fonction continue avec série de Fourier divergente
- Fejer 1900 : démonstration du théorème qui porte son nom

Préliminaires sur le cercle unité

Soit

$$\mathbf{S}^1 := \mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z}.$$

Alors

- \mathbf{S}^1 est un groupe abélien
- \mathbf{S}^1 est un espace métrique pour la distance
$$d(\theta_1 + 2\pi\mathbf{Z}, \theta_2 + 2\pi\mathbf{Z}) = \min\{|\theta_1 - \theta_2 + 2n\pi| : n \in \mathbf{Z}\}$$
- \mathbf{S}^1 est un groupe topologique **compact**.

En fait,

$$\mathbf{U} := \{z \in \mathbf{C} : |z| = 1\} \rightarrow \mathbf{S}^1, e^{2\pi i\theta} \mapsto \theta + 2\pi\mathbf{Z}$$

est un isomorphisme de groupes et un homéomorphisme.

Soit $f : \mathbf{S}^1 \rightarrow \mathbf{C}$ une fonction. Alors il existe une unique fonction

$$\tilde{f} : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{C}$$

qui est 2π -**périodique** et telle que $f \circ p = \tilde{f}$, où $p : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}/\mathbf{Z}$ est l'application quotient.

Fonctions sur le cercle unité

Soit $f : \mathbf{S}^1 \rightarrow \mathbf{C}$ une fonction et $\tilde{f} : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{C}$ la fonction correspondante.

Alors

- f est continue $\Leftrightarrow \tilde{f}$ est continue.
- f est de classe C^k \Leftrightarrow \tilde{f} est de classe C^k pour $k \in \mathbf{N}$.
définition
- Pour θ_1, θ_2 avec $0 \leq \theta_2 - \theta_1 \leq 2\pi$, on définit

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2} f(\theta) d\theta := \frac{1}{2\pi} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \tilde{f}(x) dx;$$

en particulier,

$$\int_{\mathbf{S}^1} f(\theta) d\theta := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \tilde{f}(x) dx.$$

On **identifia** $f : \mathbf{S}^1 \rightarrow \mathbf{C}$ avec la fonction 2π -périodique $\tilde{f} : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{C}$.

Espaces L^p sur le cercle

Pour $p \in [1, +\infty[$, soit

$$L^p(\mathbf{S}^1) = \{f : \mathbf{S}^1 \rightarrow \mathbf{C} : f \text{ mesurable et } L^p\text{-intégrable}\}$$

muni de la norme $\|\cdot\|_p$ pour laquelle

$$\|f\|_p^p = \int_{\mathbf{S}^1} |f(x)|^p dx = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x)|^p dx.$$

On définit également

$$L^\infty(\mathbf{S}^1) = \{f : \mathbf{S}^1 \rightarrow \mathbf{C} : f \text{ mesurable et bornée presque partout}\}$$

muni de la norme

$$\|f\|_\infty = \sup.\text{ess.}|f| = \inf\{K : |f| \leq K \text{ presque partout}\}.$$

Quelques remarques

Remarques

- On a

$$C(\mathbf{S}^1) \subset L^\infty(\mathbf{S}^1) \subset L^p(\mathbf{S}^1) \subset L^q(\mathbf{S}^1) \subset L^1(\mathbf{S}^1),$$

pour tous $q \leq p$.

Preuve : Le fait que $L^p(\mathbf{S}^1) \subset L^q(\mathbf{S}^1)$ découle du fait que $\mathbf{1}_{\mathbf{S}^1}$ est intégrable.

- Pour $f \in L^1(\mathbf{S}^1)$ et $a \in \mathbf{R}$, on a $\int_0^{2\pi} f(x) dx = \int_a^{a+2\pi} f(x) dx$.

Preuve : Comme $\int_a^{a+2\pi} f = \int_a^0 f + \int_0^{2\pi} f + \int_{2\pi}^{a+2\pi} f = -\int_0^a f + \int_0^{2\pi} f + \int_{2\pi}^{a+2\pi} f$, il suffit de montrer que $\int_{2\pi}^{a+2\pi} f = \int_0^a f$.

C'est le cas : $\int_{2\pi}^{a+2\pi} f(x) dx \stackrel{[t=x-2\pi]}{=} \int_0^a f(t+2\pi) dt = \int_0^a f(t) dt$, par 2π -périodicité de f .

- Pour $a \in \mathbf{R}$ et $f \in L^p(\mathbf{S}^1)$, soit $\tau_a f : \mathbf{S}^1 \rightarrow \mathbf{C}$ définie par $\tau_a f(x) = f(a+x)$. On a : $\tau_a f \in L^p(\mathbf{S}^1)$ et $\|\tau_a f\|_p = \|f\|_p$.

Preuve : Le fait que $\tau_a f$ est 2π -périodique est évident ; on a

$$\int_0^{2\pi} \tau_a f(x) dx = \int_0^{2\pi} f(x+a) dx \stackrel{[t=x+a]}{=} \int_a^{a+2\pi} f(t) dt = \int_0^{2\pi} f(t) dt.$$

Continuité des translations

Proposition 1

Soit $f \in L^p(\mathbf{S}^1)$ et $p \in [1, +\infty[$. Alors

- $\lim_{a \rightarrow 0} \|\tau_a f - f\|_p = 0$;
- l'application $\mathbf{R} \rightarrow L^p(\mathbf{S}^1), x \mapsto \tau_x f$ est continue.

Preuve : Comme $\|\tau_{a+x} f - \tau_x f\|_p = \|\tau_x(\tau_a f - f)\|_p = \|\tau_a f - f\|_p$, il suffit de montrer la 1^{ère} assertion. Comme $C(\mathbf{S}^1)$ est dense dans $L^p(\mathbf{S}^1)$ et que τ_a est isométrique, il suffit considérer le cas où $f \in C(\mathbf{S}^1)$. On a

$$\|\tau_a f - f\|_p^p = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x+a) - f(x)|^p dx \leq \sup_{x \in [0, 2\pi]} |f(x+a) - f(x)|^p ; \text{ l'assertion découle de la continuité uniforme de } f.$$

Convolution sur le cercle

Soient $f, g \in L^1(\mathbf{S}^1)$.

Proposition 3

La fonction $t \mapsto f(x-t)g(t)$ est dans $L^1(\mathbf{S}^1)$ pour presque tout $x \in \mathbf{R}$.

Preuve : comme f et g sont intégrables sur $[0, 2\pi]$, la fonction $(x, t) \mapsto f(x-t)g(t)$ est intégrable sur $[0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$. L'assertion découle alors du théorème de Fubini.

Définition

Soient $f, g \in L^1(\mathbf{S}^1)$. Le **produit de convolution** $f * g : \mathbf{S}^1 \rightarrow \mathbf{C}$ est défini par

$$f * g(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x-t)g(t)dt$$

On observe que ce produit est commutatif : $f * g = g * f$, car

$$\int_0^{2\pi} f(x-t)g(t)dt \underset{u=x-t}{=} - \int_x^{x-2\pi} f(u)g(x-u)du = \int_0^{2\pi} f(u)g(x-u)du.$$

Quelques propriétés du produit de convolution

Proposition 4

Soient $f \in L^1(\mathbf{S}^1)$ et $g \in L^p(\mathbf{S}^1)$ pour $p \in [1, +\infty]$. Alors

- $f * g \in L^p(\mathbf{S}^1)$.
- $\|f * g\|_p \leq \|f\|_1 \|g\|_p$

Preuve : Le cas $p = +\infty$ étant évident, on peut supposer que $p < +\infty$. Par homogénéité, on peut aussi supposer que $\|f\|_1 = 1$. Par l'inégalité de Jensen, on a alors $(\int_0^{2\pi} |f(x-t)||g(t)| dt)^p \leq \int_0^{2\pi} |f(x-t)||g(t)|^p dt$ et donc

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f * g(x)|^p dx &\leq \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{2\pi} |f(x-t)||g(t)| dt \right)^p dx \leq \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x-t)||g(t)|^p dt \\ &= \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} |f(x)| dx \int_0^{2\pi} |g(t)|^p dt \\ &= \|f\|_1 \|g\|_p^p. \end{aligned}$$

Quelques propriétés du produit de convolution

Corollaire

$L^1(\mathbf{S}^1)$ est une algèbre pour le produit de convolution et on a $\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1$ pour tout $f, g \in L^1(\mathbf{S}^1)$. (On dit que $L^1(\mathbf{S}^1)$ est une **algèbre de Banach** commutative.)

Remarque

Soient $f \in L^1(\mathbf{S}^1)$ et $g \in L^\infty(\mathbf{S}^1)$. Alors $f * g \in C(\mathbf{S}^1)$.

Preuve : On a $\|\tau_a(f * g) - f * g\|_\infty = \|(\tau_a f - f) * g\|_\infty \leq \|\tau_a f - f\|_1 \|g\|_\infty \rightarrow_{a \rightarrow 0} 0$.

Coefficients de Fourier

Définition

Soit $f \in L^1(\mathbf{S}^1)$. Pour $n \in \mathbf{Z}$, on définit le **n-ième coefficient de Fourier** $c_n(f)$ de f par

$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-int} dt .$$

Quelques règles de calcul sur les coefficients de Fourier

On définit $e_n \in C(\mathbf{S}^1)$ par $e_n(t) = e^{int}$.

Proposition 5

Soient $f, g \in L^1(\mathbf{S}^1)$, $a \in \mathbf{R}$, $n \in \mathbf{Z}$. Alors

- (1) $c_n(\check{f}) = c_{-n}(f)$ où $\check{f}(t) = f(-t)$.
- (2) $c_n(\bar{f}) = \overline{c_{-n}(f)}$
- (3) $c_n(\tau_a f) = e^{ina} c_n(f)$
- (4) $f * e_n = c_n(f) e_n$
- (5) si f est continue et C^1 par morceaux, alors $c_n(f') = inc_n(f)$.
- (6) $c_n(f * g) = c_n(f) c_n(g)$.

Preuve : Vérifications immédiates ; par exemple, pour (5) : écrivons $[0, 2\pi] = \cup_{j=0}^{l-1} [a_j, a_{j+1}]$ avec $0 = a_0 < a_1 < \dots < a_l = 2\pi$ et f

C^1 sur $[a_j, a_{j+1}]$. On a $\int_{a_j}^{a_{j+1}} f'(t) e^{-int} dt \stackrel{IPP}{=} [f(t) e^{-int}]_{a_j}^{a_{j+1}} + in \int_{a_j}^{a_{j+1}} f(t) e^{-int} dt$ et donc

$$c_n(f') = \frac{1}{2\pi} [f(t) e^{-int}]_{0j}^{2\pi} + inc_n(f) = inc_n(f).$$

Lemme de Riemann-Lebesgue

Théorème 1 (Lemme de Riemann-Lebesgue)

Soient $a < b$ et $f \in L^1([a, b])$. Alors, on a

$$\lim_{|\lambda| \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) e^{i\lambda x} dx = 0$$

ainsi que $\lim_{|\lambda| \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) \cos(\lambda x) dx = 0$ et

$$\lim_{|\lambda| \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) \sin(\lambda x) dx = 0$$

Preuve : Il suffit de montrer la première formule.

Soit $\lambda_n \in \mathbf{R}$ avec $|\lambda_n| \rightarrow +\infty$. On définit des formes linéaires

$$\varphi_n : L^1([a, b]) \rightarrow \mathbf{C}, \quad f \mapsto \int_a^b f(t) e^{i\lambda_n t} dt.$$

On a $|\varphi_n(f)| \leq \|f\|_1$ pour tout $f \in L^1([a, b])$ et donc $\|\varphi_n\| \leq 1$.

Soit $I = [c, d]$ avec $I \subset [a, b]$. Alors

$$\varphi_n(\mathbf{1}_I) = \int_c^d e^{i\lambda_n t} dt = \frac{e^{i\lambda_n d} - e^{i\lambda_n c}}{i\lambda_n(d-c)}$$

et donc $|\varphi_n(\mathbf{1}_I)| \leq 2/|\lambda_n|(d-c)$. D'où : $|\varphi_n(\mathbf{1}_I)| \rightarrow_{n \rightarrow +\infty} 0$.

Or $\text{Vect}\{\mathbf{1}_I : I \subset [a, b]\}$ est dense dans $L^1([a, b])$ et $\sup_n \|\varphi_n\| \leq 1$. Il s'ensuit que $|\varphi_n(f)| \rightarrow_{n \rightarrow +\infty} 0$, pour tout $f \in L^1([a, b])$.

Coefficients de Fourier et homomorphisme d'algèbres

On note

$$c_0(\mathbf{Z}) := \{(u_n)_{n \in \mathbf{Z}} : \lim_{|n| \rightarrow +\infty} u_n = 0\}.$$

C'est une algèbre pour le produit usuel de suites; on munit $c_0(\mathbf{Z})$ de la norme $\|u\|_\infty = \sup_{n \in \mathbf{Z}} |u_n|$ pour $u = (u_n)_{n \in \mathbf{Z}}$.
Pour $f \in L^1(\mathbf{S}^1)$, on définit $\gamma(f) := (c_n(f))_{n \in \mathbf{Z}}$.

Proposition 7

- $\gamma : f \mapsto \gamma(f)$ est un homomorphisme d'algèbres entre $L^1(\mathbf{S}^1)$ et $c_0(\mathbf{Z})$
- γ est continue et $\|\gamma\| = 1$.

Preuve : Le fait que $\gamma(f) \in c_0(\mathbf{Z})$ découle du Lemme de Riemann-Lebesgue. La linéarité de γ est claire. Le fait que $\gamma(f * g) = \gamma(f)\gamma(g)$ pour $f, g \in L^1(\mathbf{S}^1)$ est une conséquence de la Proposition 5 (6).

Comme $|c_n(f)| \leq \|f\|_1$, il est clair que $\|\gamma\| \leq 1$. Pour $f = \mathbf{1}_{\mathbf{S}^1}$, on a $c_0(f) = 1$, donc $\|\gamma(f)\| \geq 1$ et il s'ensuit que $\|\gamma\| = 1$.

Remarque : Nous verrons plus tard que l'homomorphisme $\gamma : L^1(\mathbf{S}^1) \rightarrow c_0(\mathbf{Z})$ est injectif mais n'est **pas** surjectif.

Unités approchées dans $L^1(\mathbf{S}^1)$

Proposition 6

$L^1(\mathbf{S}^1)$ ne possède pas d'élément unité.

Preuve : Supposons, par l'absurde, que $L^1(\mathbf{S}^1)$ possède un élément unité $f_0 \in L^1(\mathbf{S}^1)$. Alors, pour tout $f \in L^1(\mathbf{S}^1)$, on a $f_0 * f = f$ et donc $c_n(f_0)c_n(f) = c_n(f)$, c-à-d $(c_n(f_0) - 1)c_n(f) = 0$ pour tout $n \in \mathbf{Z}$.

Pour $f = e_m$, on a $c_n(f) = \delta_{mn}$ (symbole de Kronecker) et il s'ensuit que $c_n(f_0) = 1$ pour tout $n \in \mathbf{Z}$. Ceci contredit le Lemme de Riemann-Lebesgue.

Par contre, $L^1(\mathbf{S}^1)$ possède des unités approchées.

Définition

Une **unité approchée** dans $L^1(\mathbf{S}^1)$ est une suite $(f_N)_{N \geq 1}$ dans $L^1(\mathbf{S}^1)$ avec les propriétés suivantes :

(U1) $f_N(t) \geq 0$, pour tout $t \in \mathbf{S}^1$ et $N \geq 1$;

(U2) $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f_N(t) dt = 1$ pour tout $N \geq 1$;

(U3) pour tout $\delta > 0$, on a $\lim_{N \rightarrow \infty} \left(\int_{-\pi}^{-\delta} f_N(t) dt + \int_{\delta}^{\pi} f_N(t) dt \right) = 0$.

De l'utilité des unités approchées.

La proposition suivante est le résultat-clé sur les unités approchées.

Proposition 7

Soit $(f_N)_{N \geq 1}$ une unité approchée dans $L^1(\mathbf{S}^1)$. Alors

- pour tout $p \in [1, +\infty[$ et tout $f \in L^p(\mathbf{S}^1)$, on a $\|f_N * f - f\|_p \rightarrow_{N \rightarrow \infty} 0$;
- tout $f \in C(\mathbf{S}^1)$, on a $\|f_N * f - f\|_\infty \rightarrow_{N \rightarrow \infty} 0$.

Preuve : Pour tout $x \in \mathbf{S}^1$, on a $(f_N * f - f)(x) \stackrel{(U2)}{=} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f_N(t)[f(x-t) - f(x)]dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f_N(t)(\tau_{-t}f - f)(x)dt$; d'où

$$2\pi \|f_N * f - f\|_p^p = \int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f_N(t)(\tau_{-t}f - f)(x)dt \right|^p dx \leq \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f_N(t)|\tau_{-t}f - f|(x)dt \right)^p dx \stackrel{\text{Jensen}}{\leq}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f_N(t)|\tau_{-t}f - f|(x)^p dt dx \stackrel{\text{Fubini}}{=} \int_{-\pi}^{\pi} f_N(t) \|\tau_{-t}f - f\|_p^p dt.$$

Soit $\varepsilon > 0$. Par la continuité de $t \mapsto \tau_{-t}f$ (Proposition 1), il existe $\delta > 0$ tel que $\|\tau_{-t}f - f\|_p^p < \varepsilon$ pour tout $|t| < \delta$. Par (U3), il existe N_0 tel que $\int_{-\delta}^{\delta} f_N(t)dt + \int_{\delta}^{\pi} f_N(t)dt \leq \varepsilon$ pour tout $N \geq N_0$. On a alors, pour tout $N \geq N_0$,

$$2\pi \|f_N * f - f\|_p^p \leq \int_{-\delta}^{\delta} \frac{1}{2\pi} f_N(t) \|\tau_{-t}f - f\|_p^p dt + \int_{\delta < |t| \leq \pi} \frac{1}{2\pi} f_N(t) \|\tau_{-t}f - f\|_p^p dt \leq \varepsilon + 2^p \varepsilon \|f\|_p^p.$$

Ceci montre que $\|f_N * f - f\|_p \rightarrow_{N \rightarrow \infty} 0$.

De même, si $f \in C(\mathbf{S}^1)$, on montre en utilisant la continuité uniforme de f que $\|f_N * f - f\|_\infty \rightarrow_{N \rightarrow \infty} 0$.

Une remarque

Remarque

Il est facile de construire des unités approchées : pour $N \geq 1$, soit f_N la fonction 2π -périodique sur \mathbf{R} définie sur $[-\pi, \pi]$ par

$$f_N(x) = \begin{cases} \pi N & \text{si } x \in [-1/N, 1/N] \\ 0 & \text{si } x \in [-\pi, \pi] \setminus [-1/N, 1/N] \end{cases}$$

On vérifie immédiatement que $(f_N)_N$ est une unité approchée de $L^1(\mathbf{S}^1)$.

Noyaux

Soit $f_0 \in L^1(\mathbf{S}^1)$. Alors f_0 définit un opérateur linéaire $C_{f_0} : L^p(\mathbf{S}^1) \rightarrow L^p(\mathbf{S}^1)$ donné par la convolution avec f_0 :

$$\forall f \in L^p(\mathbf{S}^1) : C_{f_0}(f) = f_0 * f.$$

L'opérateur C_{f_0} est continu de norme $\leq \|f_0\|_1$. On dit que f_0 est le **noyau** de l'opérateur C_{f_0} ; en fait, le noyau de C_{f_0} est plutôt la fonction $(x, t) \mapsto f_0(x - t)$ définie sur le produit cartésien $\mathbf{S}^1 \times \mathbf{S}^1$ et C_{f_0} est l'opérateur intégral correspondant.

Polynômes trigonométriques

On note

$$\text{Trig}(\mathbf{S}^1) := \text{Vect}\{e_n : n \in \mathbf{Z}\},$$

l'espace des **polynômes trigonométriques**.

Proposition 8

- $\text{Trig}(\mathbf{S}^1)$ est un idéal de $L^1(\mathbf{S}^1)$.
- Supposons que $\text{Trig}(\mathbf{S}^1)$ contient une unité approchée $(f_N)_N$ pour $L^1(\mathbf{S}^1)$. Soit $f \in L^p(\mathbf{S}^1)$ pour $p \in [1, +\infty[$ ou bien $f \in C(\mathbf{S}^1)$). Alors $f_N * f \in \text{Trig}(\mathbf{S}^1)$ et $\|f_N * f - f\|_p \rightarrow_{N \rightarrow \infty} 0$ ou bien $\|f_N * f - f\|_\infty \rightarrow_{N \rightarrow \infty} 0$; en particulier $\text{Trig}(\mathbf{S}^1)$ est dense dans $L^p(\mathbf{S}^1)$ (pour la norme $\|\cdot\|_p$) et dans $C(\mathbf{S}^1)$ (pour la norme $\|\cdot\|_\infty$)

Preuve : La première assertion découle du fait que, pour tout $f \in L^1(\mathbf{S}^1)$ et $n \in \mathbf{Z}$, on a $f * e_n = c_n(f)e_n$ (Proposition 5).

La deuxième assertion découle de la première et de la Proposition 9.

Noyau de Dirichlet et série de Fourier

Définition

- Pour un entier $N \geq 0$, soit

$$D_N = \sum_{n=-N}^N e_n \in \text{Trig}(\mathbf{S}^1),$$

le **noyau de Dirichlet**.

- Pour $f \in L^1(\mathbf{S}^1)$ et $N \geq 0$, on note

$$S_N(f)(t) = \sum_{n=-N}^N c_n(f) e_n(t) = \sum_{n=-N}^N c_n(f) e^{int}, t \in \mathbf{S}^1,$$

la N -ième somme partielle de la **série de Fourier** de f .

Noyaux de Dirichlet et séries de Fourier

Question fondamentale

Peut-on reconstituer f (disons continue) à partir de sa série de Fourier

$$S(f)(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(f) e^{int}; \text{ en d'autres termes : a-t-on } f = S(f)?$$

Il y a un lien simple mais basique entre D_N et S_N .

Proposition 9

Pour $f \in L^1(\mathbf{S}^1)$ et $N \geq 0$, on a

$$S_N(f) = D_N * f.$$

Preuve : $S_N(f) = \sum_{n=-N}^N c_n(f) e_n = \sum_{n=-N}^N f * e_n = f * D_N = D_N * f.$

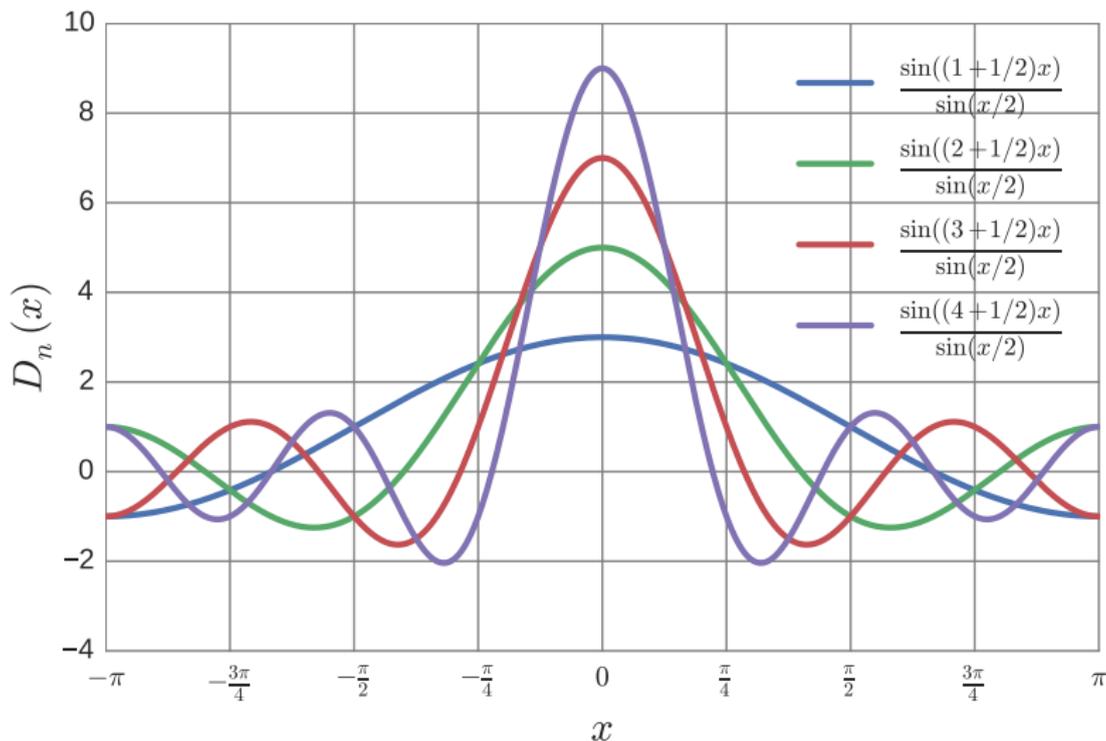
Quelques propriétés du noyau de Dirichlet

La vie serait parfaite, si les D_N formaient une unité approchée de $L^1(\mathbf{S}^1)$. Ce n'est malheureusement pas le cas....

Proposition 10

- D_N est pair ;
- $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_N(t) dt = 1$;
- $D_N(x) = \frac{\sin[(N + \frac{1}{2})x]}{\sin(\frac{x}{2})}$ pour tout $x \neq 0$ et $D_N(0) = 2N + 1$.
- $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |D_N(t)| dt \geq \frac{4}{\pi^2} \ln(N)$.

Quelques propriétés du noyau de Dirichlet



Quelques propriétés du noyau de Dirichlet : preuves

(1) et (2) sont immédiats.

(3) Il est clair que $D_N(0) = 2N + 1$. Soit $x \in [-\pi, \pi]$, $x \neq 0$. Alors, comme $e^{ix} \neq 1$, on a

$$\begin{aligned}
 D_N(x) &= \sum_{n=-N}^N e^{inx} = e^{-iNx} \sum_{n=0}^{2N} e^{inx} = e^{-iNx} \frac{1 - e^{i(2N+1)x}}{1 - e^{ix}} \\
 &= e^{-iNx} \frac{e^{i(2N+1)x-1}}{e^{ix} - 1} = e^{-iNx} \frac{e^{iNx} (e^{i(N+1)x} - e^{-iNx})}{e^{ix/2} (e^{ix/2} - e^{-ix/2})} \\
 &= e^{-ix/2} \frac{(e^{i(N+1)x} - e^{-iNx})}{(e^{ix/2} - e^{-ix/2})} = \frac{e^{i(N+1/2)x} - e^{-i(N+1/2)x}}{e^{ix/2} - e^{-ix/2}} \\
 &= \frac{\sin\left(N + \frac{1}{2}\right)x}{\sin \frac{x}{2}}.
 \end{aligned}$$

Quelques propriétés du noyau de Dirichlet : preuves

(4) En utilisant la parité de D_N et fait que $\sin y \leq y$ pour $0 \leq y \leq \pi$, on a

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |D_N(t)| dt &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} |D_N(t)| dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \left| \frac{\sin(N + \frac{1}{2})t}{\sin \frac{t}{2}} \right| dt \\
 &\geq \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \left| \frac{\sin(N + \frac{1}{2})t}{t} \right| dt \stackrel{[x=(N+(1/2))t]}{=} \frac{2}{\pi} \int_0^{(N+(1/2))\pi} \frac{|\sin x|}{x} dx \\
 &\geq \frac{2}{\pi} \int_0^{N\pi} \frac{|\sin x|}{x} dx = \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^N \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} \frac{|\sin x|}{x} dx \\
 &\geq \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^N \frac{1}{k\pi} \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} |\sin x| dx = \frac{4}{\pi^2} \sum_{k=1}^N \frac{1}{k} \geq \frac{4}{\pi^2} \log N.
 \end{aligned}$$

Pour la dernière égalité, on a utilisé le fait que

$$\int_{(k-1)\pi}^{k\pi} |\sin x| dx = \int_0^{\pi} \sin x dx = 2.$$

Un corollaire important

On observe que la Proposition précédente montre que $\|D_N\|_1 \rightarrow_{N \rightarrow \infty} +\infty$. Voici une conséquence importante de ce fait.

Corollaire

Il existe une fonction $f \in C(\mathbf{S}^1)$ telle que $\sup_{n \geq 0} |S_N(f)(0)| = +\infty$; en particulier, $(S_N(f)(0))_N$ est divergente.

Preuve : On considère la forme linéaire $\varphi_N : C(\mathbf{S}^1) \rightarrow \mathbf{C}$ donnée par

$$\varphi_N(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_N(t) f(t) dt = D_N * f(0) = S_N(f)(0).$$

Comme $\|D_N * f\|_{\infty} \leq \|D_N\|_1 \|f\|_{\infty}$, φ_N est continue sur $(C(\mathbf{S}^1), \|\cdot\|_{\infty})$ et $\|\varphi_N\| \leq \|D_N\|_1$.

Posons $f_n = D_N / (\frac{1}{n} + |D_N|)$. Alors $f_n \in C(\mathbf{S}^1)$ et $\|f_n\|_{\infty} \leq 1$. De plus, $\varphi_N(f_n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |D_N(t)|^2 / (\frac{1}{n} + |D_N(t)|) dt$ et donc

$\varphi_N(f_n) \rightarrow_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |D_N(t)| dt = \|D_N\|_1$. Il s'ensuit que $\|\varphi_N\| = \|D_N\|_1$.

Supposons par l'absurde que $(\varphi_N(f))_N$ est bornée pour tout $f \in C(\mathbf{S}^1)$. Alors, par le Théorème de Banach-Steinhaus, la suite

$(\|\varphi_N\|)_N$ est bornée. Comme $\|\varphi_N\| = \|D_N\|_1 \rightarrow_{N \rightarrow \infty} +\infty$, ceci est une contradiction.

Convergence ponctuelle : Théorème de Dirichlet

Théorème 2 (Théorème de Dirichlet)

Soit $f : \mathbf{S}^1 \rightarrow \mathbf{C}$ continue par morceaux et $x_0 \in \mathbf{R}$. On suppose que $\lim_{h \rightarrow 0, h > 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 +)}{h}$ et $\lim_{h \rightarrow 0, h > 0} \frac{f(x_0 - h) - f(x_0 -)}{h}$ existent. Alors $S_N(f)$ converge en x_0 et

$$S_N(f)(x_0) = \frac{1}{2} [f(x_0 +) + f(x_0 -)].$$

Preuve : Soit $g := \tau_{x_0} f$. Alors $g(0^+) = f(x_0^+)$, $g(0^-) = f(x_0^-)$, $\lim_{h \rightarrow 0, h > 0} \frac{g(h) - g(0^+)}{h}$ et $\lim_{h \rightarrow 0, h > 0} \frac{g(-h) - g(0^-)}{h}$ existent et $S_N g(0) = S_N f(x_0)$ pour tout N . On peut donc supposer que $x_0 = 0$.

Comme $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_N(x) dx = 1$ et comme D_N est pair, on a $\frac{f(0^+)}{2} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} f(0^+) D_N(x) dx$; il s'ensuit que

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} f(x) D_N(x) dx - \frac{f(0^+)}{2} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} (f(x) - f(0^+)) D_N(x) dx = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{f(x) - f(0^+)}{x} \frac{x}{\sin(\frac{x}{2})} \sin[(N + \frac{1}{2})x] dx.$$

Par hypothèse sur f , la fonction $x \mapsto \frac{f(x) - f(0^+)}{x} \frac{x}{\sin(\frac{x}{2})}$ se prolonge en une fonction continue φ sur $[0, \pi]$. On a donc

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} f(x) D_N(x) dx - \frac{f(0^+)}{2} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} \varphi(x) \sin[(N + \frac{1}{2})x] dx$$

et il découle du Lemme de Riemann-Lebesgue que $\frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} f(x) D_N(x) dx \rightarrow_{N \rightarrow \infty} \frac{f(0^+)}{2}$. On démontre de manière similaire que $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^0 f(x) D_N(x) dx \rightarrow_{N \rightarrow \infty} \frac{f(0^-)}{2}$.

Noyaux de Fejer

Définition

Pour un entier $N \geq 0$, soit

$$F_N = \frac{1}{N+1} (D_0 + \cdots + D_N) \in \text{Trig}(\mathbf{S}^1),$$

le **noyau de Fejer**.

Le N -ième noyau de Fejer est donc la moyenne arithmétique des $N+1$ premiers noyaux de Dirichlet. Les noyaux de Fejer ont l'avantage de former une unité approchée de $L^1(\mathbf{S}^1)$.

Quelques propriétés du noyau de Fejer

Proposition 13

- (1) Pour tout $f \in L^1(\mathbf{S}^1)$, on a : $F_N * f = \frac{1}{N+1} \sum_{n=0}^N S_n(f)$;
- (2) $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F_N(t) dt = 1$;
- (3) $F_N(x) = \frac{1}{N+1} \left(\frac{\sin \frac{(N+1)x}{2}}{\sin \left(\frac{x}{2}\right)} \right)^2$ pour tout $x \neq 0$ et $F_N(0) = N+1$. En particulier, $F_N \geq 0$;
- (4) pour tout $\delta > 0$, on a $\lim_{N \rightarrow \infty} \left(\int_{-\delta}^{\delta} F_N(t) dt + \int_{\delta}^{\pi} F_N(t) dt \right) = 0$.

Quelques propriétés du noyau de Fejer : preuves

(1) est évident car $D_N * f = S_N(f)$.

(2) On a $(N+1) \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F_N(x) dx = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=0}^N \int_{-\pi}^{\pi} D_n(x) dx = N+1$.

(3) On a $F_N(0) = \frac{1}{N+1} \sum_{n=0}^N D_n(0) = \frac{1}{N+1} \sum_{n=0}^N 2n+1 = N+1$.

Soit $x \neq 0$. Alors

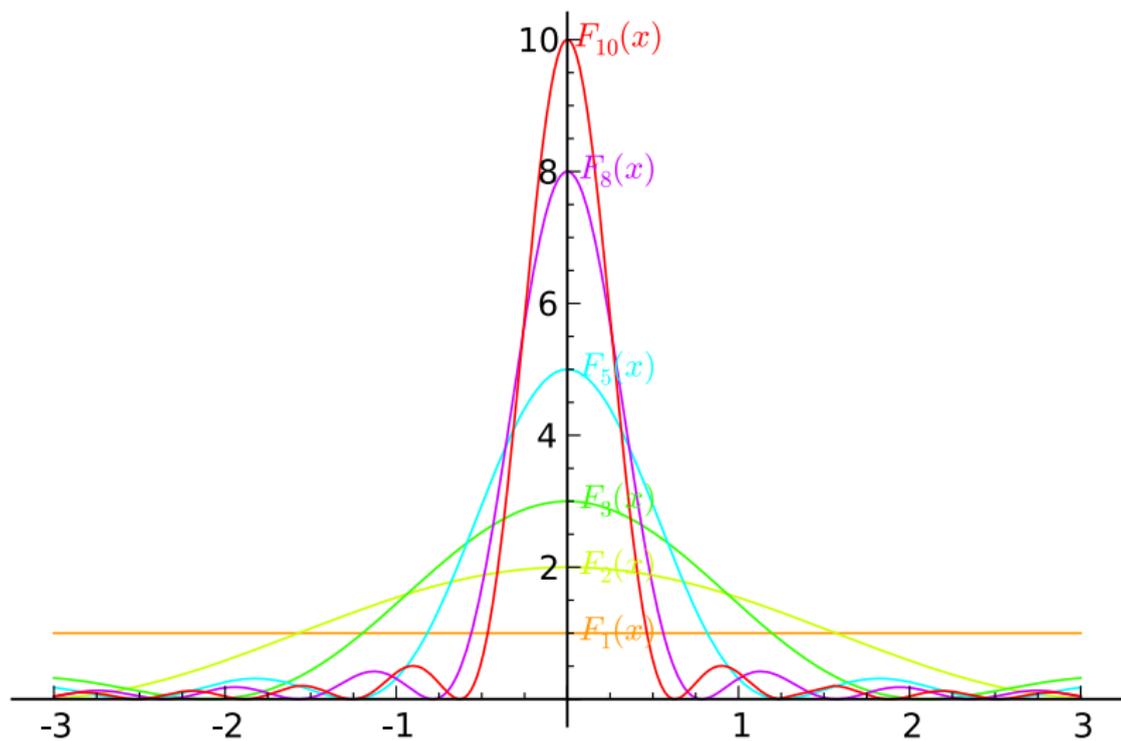
$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^N D_n(x) &= \sum_{n=0}^N \frac{\sin((n+\frac{1}{2})x)}{\sin \frac{x}{2}} = \frac{1}{\sin \frac{x}{2}} \operatorname{Im} \left(\sum_{n=0}^N e^{i(n+\frac{1}{2})x} \right) = \\ &= \frac{1}{\sin \frac{x}{2}} \operatorname{Im} \left(e^{ix/2} \frac{1-e^{i(N+1)x}}{1-e^{ix}} \right) = \frac{1}{\sin \frac{x}{2}} \operatorname{Im} \left(\frac{e^{ix/2} e^{i(N+1)x/2} 2i \sin((N+1)x/2)}{e^{ix/2} 2i \sin(x/2)} \right) = \\ &= \frac{\sin((N+1)x/2)}{\sin \frac{x}{2}} \operatorname{Im} (e^{i(N+1)x/2}) = \left(\frac{\sin((N+1)x/2)}{\sin \frac{x}{2}} \right)^2. \end{aligned}$$

(4) Pour $\delta < |x| \leq \pi$, on a avec (2),

$$F_N(x) \leq \frac{1}{N+1} \left(\frac{1}{\sin(\frac{x}{2})} \right)^2 \leq \frac{1}{N+1} \left(\frac{1}{\sin(\frac{\delta}{2})} \right)^2$$

et donc $\sup_{\delta < |x| \leq \pi} F_N(x) \rightarrow_{N \rightarrow \infty} 0$. D'où $\int_{\delta < |x| \leq \pi} F_N(x) dx \rightarrow_{N \rightarrow \infty} 0$.

Quelques propriétés du noyau de Fejer



Convergence uniforme et au sens L^p : Théorème de Fejer

Theorème 3 (Théorème de Fejer)

- Pour tout $p \in [1, +\infty[$ et tout $f \in L^p(\mathbf{S}^1)$, on a $\|F_N * f - f\|_p \rightarrow_{N \rightarrow \infty} 0$;
- Pour tout $f \in C(\mathbf{S}^1)$, on a $\|F_N * f - f\|_\infty \rightarrow_{N \rightarrow \infty} 0$.

Preuve : Par la Proposition 13, $(F_N)_N$ est une unité approchée de $L^1(\mathbf{S}^1)$; l'assertion découle donc immédiatement de la Proposition 5.

Quelques conséquences du Théorème de Fejer

On rappelle que $\text{Trig}(\mathbf{S}^1) = \text{Vect}\{e_n \mid n \in \mathbf{Z}\}$ est l'algèbre des polynômes trigonométriques.

Corollaire 1

- $\text{Trig}(\mathbf{S}^1) = \text{Vect}\{e_n \mid n \in \mathbf{Z}\}$ est dense $C(\mathbf{S}^1)$ pour la norme $\|\cdot\|_\infty$.
- $\text{Trig}(\mathbf{S}^1) = \text{Vect}\{e_n \mid n \in \mathbf{Z}\}$ dans $L^p(\mathbf{S}^1)$ pour la norme L^p , pour tout $p \in [1, +\infty[$.

Preuve : On a $F_N \in \text{Trig}(\mathbf{S}^1)$ pour tout N et donc (Proposition 8) $F_N * f \in \text{Trig}(\mathbf{S}^1)$ pour tout $f \in L^1(\mathbf{S}^1)$. L'assertion découle alors du Théorème de Fejer.

Quelques conséquences du Théorème de Fejer

On rappelle que $\gamma : L^1(\mathbf{S}^1) \rightarrow c_0(\mathbf{Z})$ est l'homomorphisme d'algèbres donné par $\gamma(f) = (c_n(f))_{n \in \mathbf{Z}}$.

Corollaire 2

$\gamma : L^1(\mathbf{S}^1) \rightarrow c_0(\mathbf{Z})$ est *injectif*.

Preuve : Soit $f \in L^1(\mathbf{S}^1)$ tel que $\gamma(f) = 0$, c-à-d $c_n(f) = 0$ pour tout $n \in \mathbf{Z}$. Alors $S_N f = D_N * f = 0$ et donc

$F_N * f = \frac{1}{N+1} \sum_{n=0}^N D_n * f = 0$ pour tout N . On a donc $f = 0$ par le Théorème de Fejer.

Une remarque

Remarque

L'homomorphisme $\gamma : L^1(\mathbf{S}^1) \rightarrow c_0(\mathbf{Z})$ n'est *pas surjectif*.

Preuve : Supposons, par l'absurde, que γ est surjectif. Alors, γ est bijective, par ce qui précède. Comme $c_0(\mathbf{Z})$ est un espace de Banach, $\gamma^{-1} : c_0(\mathbf{Z}) \rightarrow L^1(\mathbf{S}^1)$ est continue, par le Théorème des isomorphismes de Banach. Ceci signifie qu'il existe $C > 0$ tel que

$$\forall f \in L^1(\mathbf{S}^1) : \|f\|_1 \leq C \|\gamma(f)\|_\infty = C \sup_{n \in \mathbf{Z}} |c_n(f)|.$$

Ceci est absurde : d'une part, on a $\|D_N\|_1 \rightarrow_{N \rightarrow \infty} +\infty$; d'autre part, $c_n(D_N) = 1$ si $-N \leq n \leq N$ et $c_n(D_N) = 0$ sinon de sorte que $\|\gamma(D_N)\|_\infty = 1$.

Le Théorème de Weierstrass comme conséquence du Théorème de Fejer

Théorème 4 (Théorème de Weierstrass)

Soit $f \in C([0, 1])$. Alors il existe une suite de polynômes $P_N : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{C}$ telle que $\|P_N - f\|_\infty \rightarrow_{N \rightarrow \infty} 0$.

Preuve : Soit $\varepsilon > 0$. Soit $g : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{C}$ la fonction continue et 2-périodique définie sur $[-1, 1]$ par $g(x) = f(|x|)$. Par le Théorème de Féjer, il existe $a_{-n}, \dots, a_n \in \mathbf{C}$ tels que $|g(x) - \sum_{k=-n}^n a_k e^{\pi i k x}| \leq \varepsilon/2$ pour tout $x \in \mathbf{R}$. On a $\sum_{j=0}^m \frac{(\pi i s)^j}{j!} \rightarrow_{m \rightarrow \infty} e^{\pi i s}$ uniformément sur tout intervalle borné. Pour tout $k \in \{-n, \dots, n\}$, il existe donc $m(k) \in \mathbf{N}$ tel que

$$\forall x \in [-1, 1] : \left| \sum_{j=0}^{m(k)} \frac{(\pi i k x)^j}{j!} - e^{\pi i k x} \right| \leq \varepsilon / (4n + 2)(|a_k| + 1).$$

Posons $P(x) := \sum_{k=-n}^n a_k \sum_{j=0}^{m(k)} \frac{(\pi i k x)^j}{j!}$. Soit $x \in [0, 1]$. Alors

$$\begin{aligned} |P(x) - f(x)| &= |P(x) - g(x)| \\ &\leq \left| P(x) - \sum_{k=-n}^n a_k e^{\pi i k x} \right| + \left| \sum_{k=-n}^n a_k e^{\pi i k x} - g(x) \right| \\ &\leq \sum_{k=-n}^n |a_k| \left| \sum_{j=0}^{m(k)} \frac{(\pi i k x)^j}{j!} - e^{\pi i k x} \right| + \varepsilon/2 \\ &\leq \sum_{k=-n}^n \varepsilon / (4n + 2) + \varepsilon/2 \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

Théorie L^2 des séries de Fourier

On rappelle que $L^2(\mathbf{S}^1)$ est un espace de Hilbert pour le produit scalaire

$$\forall f, g \in L^2(\mathbf{S}^1) : \langle f|g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \overline{g(t)} dt.$$

Le lien entre séries de Fourier et ce produit scalaire est l'observation suivante.

Observation

Pour tout $f \in L^2(\mathbf{S}^1)$ et $n \in \mathbf{Z}$, on a : $c_n(f) = \langle f|e_n \rangle$.

La proposition cruciale suivante est une autre conséquence du Théorème de Fejer.

Proposition 14

$\{e_n : n \in \mathbf{Z}\}$ est une base hilbertienne de $L^2(\mathbf{S}^1)$.

Preuve : $\langle e_n|e_m \rangle = \delta_{nm}$ et, par le Théorème de Fejer, $\text{Vect}\{e_n : n \in \mathbf{Z}\}$ est dense dans $L^2(\mathbf{S}^1)$.

Formule de Parseval

Corollaire (Formule de Parseval)

- Pour tout $f \in L^2(\mathbf{S}^1)$, on a $\|f\|_2 = \sum_{n \in \mathbf{Z}} |c_n(f)|^2$ et $\|S_N(f) - f\|_2 \rightarrow_{N \rightarrow \infty} 0$.
- Pour tous $f, g \in L^2(\mathbf{S}^1)$, on a $\langle f|g \rangle = \sum_{n \in \mathbf{Z}} c_n(f) \overline{c_n(g)}$.

Preuve : Ceci découle immédiatement du fait que $\{e_n : n \in \mathbf{Z}\}$ est une base hilbertienne de $L^2(\mathbf{S}^1)$ et que $c_n(f) = \langle f|e_n \rangle$.

Séries de Fourier de fonctions C^1

Corollaire (Convergence uniforme des séries de Fourier de fonctions C^1)

Soit $f \in C^1(\mathbf{S}^1)$. Alors $(c_n(f))_{n \in \mathbf{Z}}$ est dans $\ell^1(\mathbf{Z})$; en particulier, $\|S_N(f) - f\|_\infty \rightarrow_{N \rightarrow \infty} 0$.

Preuve : Comme $c_n(f') = inc_n(f)$, on a $|c_n(f)| = |c_n(f')|/|n|$ pour $n \neq 0$. Or $(c_n(f'))_{n \in \mathbf{Z}}$ est dans $\ell^2(\mathbf{Z})$, car $f' \in C(\mathbf{S}^1) \subset L^2(\mathbf{S}^1)$. Comme $(1/n)_{n \in \mathbf{Z}^*}$ est également dans $\ell^2(\mathbf{Z}^*)$, l'assertion s'en déduit.

Noyau de Poisson

Définition

Fixons un nombre réel $r \in [0, 1[$. Le **noyau de Poisson** P_r est la fonction 2π -périodique définie

$$\forall x \in \mathbf{R} : P_r(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|} e^{inx} = \sum_{n=1}^{\infty} r^n e^{-inx} + 1 + \sum_{n=1}^{\infty} r^n e^{inx}.$$

On observera que les séries définissant P_r convergent normalement et donc uniformément sur \mathbf{R} ; en particulier $P_r \in C(\mathbf{S}^1)$.

Quelques propriétés du noyau de Poisson

La proposition suivante montre que $(P_r)_{r \in [0,1[}$ est une unité approchée dans $L^1(\mathbf{S}^1)$.

Proposition 15

$$(1) \quad P_r(x) = \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos x + r^2} \text{ pour tout } x \in \mathbf{R}.$$

$$(2) \quad P_r(x) \geq 0 \text{ pour tout } x \in \mathbf{R}.$$

$$(3) \quad \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(t) dt = 1;$$

$$(4) \quad \text{pour tout } \delta > 0, \text{ on a } \lim_{r \rightarrow 1^-} \left(\int_{-\pi}^{-\delta} P_r(t) dt + \int_{\delta}^{\pi} P_r(t) dt \right) = 0.$$

Quelques propriétés du noyau de Poisson : preuves

$$\begin{aligned}(1) P_r(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} r^n e^{-inx} + 1 + \sum_{n=1}^{\infty} r^n e^{inx} = \frac{re^{-ix}}{1-re^{-ix}} + 1 + \frac{re^{ix}}{1-re^{ix}} \\ &= \frac{(re^{ix} - r^2) + (1 - re^{-ix} - re^{-ix} + r^2) + (re^{ix} - r^2)}{1 - re^{-ix} - re^{ix} + r^2} \\ &= \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos x + r^2}.\end{aligned}$$

(2) L'assertion découle de (1), du fait que $0 \leq r < 1$ et du fait que $1 - 2r \cos x + r^2 \geq 1 - 2r + r^2 = (1 - r)^2 \geq 0$.

Quelques propriétés du noyau de Poisson : preuves

(3) En utilisant la convergence uniforme de la série définissant P_r , on a

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(x) dx = \sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|} \int_{-\pi}^{\pi} e^{inx} dx = \sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|} \delta_{n,0} = 1.$$

(4) On a $1 - 2r \cos x + r^2 = (1 - r \cos x)^2 + r^2 \sin^2 x \geq (1 - r \cos x)^2 \geq (1 - |\cos x|)^2$; d'où, pour $\delta < |x| \leq \pi$,

$$0 \leq P_r(x) \leq \frac{1 - r^2}{(1 - |\cos x|)^2} \leq \frac{1 - r^2}{(1 - |\cos \delta|)^2}$$

et donc $P_r(x) \rightarrow_{r \rightarrow 1^-} 0$, **uniformément** pour $\delta < |x| \leq \pi$. L'assertion en découle.

Approximation de Poisson

Theorème 5 (Théorème de Poisson)

- Pour tout $p \in [1, +\infty[$ et tout $f \in L^p(\mathbf{S}^1)$, on a $\|P_r * f - f\|_p \rightarrow_{r \rightarrow 1} 0$;
- Pour tout $f \in C(\mathbf{S}^1)$, on a $\|P_r * f - f\|_\infty \rightarrow_{r \rightarrow 1} 0$.

Preuve : Par la Proposition 15, $(P_r)_r$ est une unité approchée de $L^1(\mathbf{S}^1)$; l'assertion découle donc immédiatement de la Proposition 5.

Remarque

Il est clair que P_r appartient à l'adhérence de $\text{Trig}(\mathbf{S}^1)$ pour la norme $\|\cdot\|_\infty$. Le Théorème 4 implique donc (de nouveau) que $\text{Trig}(\mathbf{S}^1)$ est dense dans $C(\mathbf{S}^1)$. Ceci est d'autant plus remarquable que le noyau de Poisson ainsi que le Théorème 4 sont antérieurs au Théorème de Fejer de 70 ans !

Remarques sur les procédés de sommation de séries

Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ une suite de nombres complexes, et $S_N = \sum_{n=0}^N u_n$ la N -ième somme partielle.

(1) On dit que $\sum_n u_n$ converge vers S si $\lim_N S_N = S$;

(2) on dit que $\sum_n u_n$ **converge au sens de Cesaro** (ou C -converge)

vers S si $\lim_N \frac{1}{N+1} (S_0 + \dots + S_N) = S$;

(3) on dit que $\sum_n u_n$ **converge au sens d'Abel** (ou A -converge) vers S si $\sum_n u_n r^n$ converge pour tout $0 \leq r < 1$ vers un nombre $A(r)$ et si $\lim_{r \rightarrow 1^-} A(r) = S$.

On peut montrer (exercice !) que :

$\sum_n u_n$ converge $\Rightarrow \sum_n u_n$ C -converge $\Rightarrow \sum_n u_n$ A -converge.

Remarques sur les procédés de sommation de séries

Les implications réciproques sont fausses en général :

(1) $\sum_n u_n$ C -converge $\not\Rightarrow \sum_n u_n$ converge ; par exemple, soit $u_n = (-1)^n$. Alors $\sum_n u_n$ ne converge pas, mais $\sum_n u_n$ C -converge vers $1/2$.

(2) $\sum_n u_n$ A -converge $\not\Rightarrow \sum_n u_n$ C -converge : par exemple, soit $u_n = (-1)^n(n+1)$. Alors

$$S_N = \begin{cases} \frac{N}{2} + 1 & \text{si } N \text{ est pair} \\ -\frac{N+1}{2} & \text{si } N \text{ est impair} \end{cases}$$

$\sum_n u_n$ n'est pas C -convergente, car $S_0 + \dots + S_N = 0$ si N est impair et $S_0 + \dots + S_N = \frac{N}{2} + 1$ si N est pair.

Cependant, comme

$$\sum_n u_n r^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1) r^n = - \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (n+1) r^{n-1} = - \frac{1}{(1+r)^2},$$

$\sum_n u_n$ est A -convergente vers $-1/4$.

Sommaton de séries de Fourier au sens de Cesaro

Soit $f \in L^1(\mathbf{S}^1)$ et $S(f)(x) = \sum_n c_n(f) e^{inx}$ sa série de Fourier en $x \in \mathbf{R}$.

On rappelle que $D_N * f(x) = S_N(f)(x)$ et que

$$F_N * f(x) = \frac{1}{N+1} (D_0 + \cdots + D_N) * f(x), \text{ de sorte que}$$

$$F_N * f(x) = \frac{1}{N+1} (S_0(f)(x) + \cdots + S_N f(x)).$$

Ainsi $\sum_n c_n(f) e^{inx}$ est C -convergente vers $f(x)$, par le Théorème de Fejer.

Somme de séries de Fourier au sens d'Abel

Soit $f \in L^1(\mathbf{S}^1)$ et $0 \leq r < 1$. Soit $x \in \mathbf{R}$. Comme la série $\sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|} e^{in(x-t)}$ est normalement convergente, on a

$$\begin{aligned} P_r * f(x) &= \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|} e^{in(x-t)} dt \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|} e^{inx} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int} dt \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|} c_n(f) e^{inx}. \end{aligned}$$

On voit donc que $\sum_n c_n(f) e^{inx}$ est A -convergente vers $f(x)$, par le Théorème de Poisson.

Séries de Fourier à partir de séries entières

Soit $F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R \in [0, +\infty]$.

Pour tout $0 \leq r < R$, on définit $f_r \in C(\mathbf{S}^1)$ par

$$\forall x \in \mathbf{R} : f_r(x) = F(re^{ix}).$$

Proposition 16

On a
$$c_n(f_r) = \begin{cases} r^n a_n & \text{si } n \geq 0 \\ 0 & \text{si } n < 0 \end{cases}$$

Preuve : Comme $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ converge uniformément sur $\{z \in \mathbf{C} : |z| \leq r\}$, on a

$$\begin{aligned} c_n(f_r) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(re^{ix}) e^{-inx} dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k r^k e^{ikx} \right) e^{-inx} dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=0}^{\infty} a_k r^k \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(k-n)x} dx = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=0}^{\infty} a_k r^k 2\pi \delta_{kn} \\ &= r^n a_n. \end{aligned}$$

Inégalités de Cauchy par les séries de Fourier

Soit $F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R \in [0, +\infty]$.

Corollaire 1 (Inégalités de Cauchy)

Pour tout $n \in \mathbf{N}$ et $0 \leq r < R$, on a

$$\left| F^{(n)}(0) \right| \leq \frac{n!}{r^n} \max_{|z|=r} |F(z)|.$$

Preuve : Pour tout $0 \leq r < R$, soit $f_r \in C(\mathbf{S}^1)$ définie par $f_r(x) = F(re^{ix})$. On a

$$\forall n \in \mathbf{Z} : |c_n(f_r)| \leq \max_{x \in \mathbf{R}} |f_r(x)| = \max_{|z|=r} |F(z)|.$$

Comme $c_n(f_r) = r^n a_n$ par la Proposition 16, il s'ensuit que

$$|a_n| \leq \frac{\max_{|z|=r} |F(z)|}{r^n}.$$

Comme $a_n = \frac{F^{(n)}(0)}{n!}$, ceci prouve l'inégalité voulue.

Théorème de Liouville par les séries de Fourier

Corollaire 2 (Théorème de Liouville)

Soit $F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $+\infty$. On suppose que F est bornée. Alors F est constante.

Preuve : Pour tout $0 \leq r$, soit $f_r \in C(\mathbf{S}^1)$ définie par $f_r(x) = F(re^{ix})$. Par la Proposition 16, on a, pour tout $n \geq 0$,

$$\begin{aligned} |a_n| &= \frac{|c_n(f_r)|}{r^n} \leq \frac{\max_{x \in \mathbf{R}} |f_r(x)|}{r^n} \\ &= \frac{\max_{|z|=r} |F(z)|}{r^n} \\ &\leq \frac{\|F\|_{\infty}}{r^n}. \end{aligned}$$

Soit $n > 0$. En faisant $r \rightarrow +\infty$, on a donc $a_n = 0$.

Principe du maximum par les séries de Fourier

Corollaire 3 (Principe du maximum)

Soit f une fonction holomorphe sur un ouvert connexe $U \subset \mathbf{C}$.
 Supposons que $|f|$ possède un maximum local en $a \in U$; c-à-d qu'il existe $r > 0$ tel que $\overline{D(a, r)} = \{z \in \mathbf{C} : |z - a| \leq r\} \subset U$ et tel que $\sup_{z \in \overline{D(a, r)}} |f(z)| = |f(a)|$. Alors f est constante sur U .

Preuve : Posons $F(z) = f(z - a)$. Alors F est développable en série entière $F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ de rayon de convergence $R \geq r$ et on a $\sup_{|z| \leq r} |F(z)| = |F(0)|$. Soit $f_r \in C(\mathbf{S}^1)$ définie par $f_r(x) = F(re^{ix})$. On a alors

$$\sup_{x \in \mathbf{R}} |f_r(x)| = \sup_{|z|=r} |F(z)| \leq |F(0)|.$$

Par l'égalité de Parseval-Plancherel, on a

$$\begin{aligned} \sum_{n \in \mathbf{Z}} |c_n(f_r)|^2 &= \|f_r\|_2^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f_r(x)|^2 dx \\ &\leq |F(0)|^2. \end{aligned}$$

Or $|F(0)|^2 = |a_0|^2$ et, par la Proposition 17, on a $c_n(f_r) = a_n r^n$ pour tout $n \geq 0$ et $c_n = 0$ pour $n < 0$. Il s'ensuit que

$\sum_{n \in \mathbf{N}} |a_n|^2 r^{2n} \leq |a_0|^2$ et donc $a_n = 0$ pour tout $n > 0$. Ainsi F est constante et donc f est constante sur un ouvert de U et,

comme U est connexe, on conclut avec le principe du prolongement analytique.

Le problème de Dirichlet

Soit $\Omega \subset \mathbf{C}$ un ouvert de bord $\partial\Omega$. Soit $g : \partial\Omega \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction continue.

Pour une fonction φ , on notera dans la suite $\varphi_x, \varphi_y, \varphi_{xy}, \dots$ ses dérivées partielles $\frac{\partial}{\partial x}\varphi, \frac{\partial}{\partial y}\varphi, \frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\varphi, \dots$

Problème de Dirichlet

Existe-t-il $\varphi : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbf{R}$ avec les propriétés suivantes :

- φ est C^2 sur Ω ;
- φ est continue sur $\overline{\Omega}$;
- $\varphi = g$ sur $\partial\Omega$;
- φ est harmonique sur Ω , c-à-d $\Delta\varphi = \varphi_{xx} + \varphi_{yy} = 0$ sur Ω ?

Fonctions holomorphes et fonctions harmoniques

Soit $\Omega \subset \mathbf{C}$ un ouvert et $f : \Omega \rightarrow \mathbf{C}$ une fonction holomorphe.

Lemma

Soient $u, v : \Omega \rightarrow \mathbf{R}$ définis par $u(x, y) = \operatorname{Re}f(z)$ et $v(x, y) = \operatorname{Im}f(z)$ pour $z = x + iy$.

- u et v sont C^∞ sur Ω ;
- u et v sont harmoniques sur Ω .

Preuve : Le fait que u et v sont C^∞ est une conséquence bien connue du fait que f est holomorphe. Par les égalités de Cauchy-Riemann, on a $u_x = v_y$ et $u_y = -v_x$. Il s'ensuit que $u_{xx} + u_{yy} = v_{yx} - v_{xy} = 0$ et de même $v_{xx} + v_{yy} = 0$.

Corollaire

Soit $\tilde{u} : \Omega \rightarrow \mathbf{R}$ définie par $\tilde{u}(x, y) = \operatorname{Re}f(\bar{z})$ pour $z = x + iy$. Alors \tilde{u} est C^∞ et harmonique sur Ω ;

Preuve : Comme $\tilde{u}(x, y) = u(x, -y)$, les assertions découlent du Lemme.

Fonctions holomorphes à partir de séries de Fourier

Soit $g : \mathbf{S}^1 \rightarrow \mathbf{C}$ une fonction continue. Posons

$$\forall n \in \mathbf{Z} : a_n = c_n(g)$$

et définissons les séries entières

$$\forall z \in \mathbf{C} : f_1(z) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n \quad \text{et} \quad f_2(z) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} z^n.$$

Fonctions holomorphes à partir de séries de Fourier

Proposition 16

- (1) f_1 et f_2 sont des fonctions holomorphes sur le disque unité $\mathbf{D} = \{z \in \mathbf{C} : |z| < 1\}$.
- (2) Soit $F : \bar{\mathbf{D}} = \mathbf{D} \cup \mathbf{S}^1 \rightarrow \mathbf{C}$ définie par

$$F(z) = \begin{cases} f_1(z) + f_2(\bar{z}) & \text{pour } z \in \mathbf{D} \\ g(z) & \text{pour } z \in \mathbf{S}^1. \end{cases}$$

Alors F est continue sur $\bar{\mathbf{D}}$ et $F|_{\mathbf{S}^1} = g$.

- (3) Si g est réelle, alors F est réelle.

Fonctions holomorphes à partir de séries de Fourier : preuve

(1) La suite $(a_n)_{n \in \mathbf{Z}} = (c_n(g))_{n \in \mathbf{Z}}$ étant bornée, les rayons de convergence des séries entières f_1 et f_2 sont ≥ 1 .

(2) F est continue sur \mathbf{D} , car les séries entières f_1 et f_2 le sont. Il est clair que $F|_{\mathbf{S}^1} = g$.

Pour $0 \leq r < 1$ et $x \in \mathbf{R}$, on a

$$\begin{aligned} F(re^{ix}) &= f_1(z) + f_2(z) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n r^n e^{inx} + \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n r^n e^{inx} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|} c_n(g) e^{inx} = P_r * g(e^{ix}), \end{aligned}$$

où P_r est le noyau de Poisson. Soit $e^{ix} \in \mathbf{S}^1$ et $r_k e^{ix_k} \in \mathbf{D}$ avec $r_k e^{ix_k} \rightarrow_{k \rightarrow \infty} e^{ix}$. Comme $P_r * g \rightarrow_{r \rightarrow 1^-} g$ uniformément sur \mathbf{S}^1 , on a $F(r_k e^{ix_k}) \rightarrow_{k \rightarrow \infty} g(e^{ix}) = F(e^{ix})$.

(3) On a $F(re^{ix}) = P_r * g(e^{ix}) = \int_{-\pi}^{\pi} g(x-t) P_r(t) dt$ pour tout r et tout t . Comme $P_r(t) \in \mathbf{R}$, l'assertion s'ensuit.

Solution du problème de Dirichlet pour le disque

Soit $g : \partial\mathbf{D} = \mathbf{S}^1 \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction continue

Théorème 6 (Problème de Dirichlet)

Soit $\varphi : \bar{\mathbf{D}} \rightarrow \mathbf{R}$ définie par

$$\varphi(r \cos x, r \sin x) = \begin{cases} \sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|} c_n(g) e^{inx} = P_r * g(x) & 0 \leq r < 1, x \in \mathbf{R} \\ g(e^{ix}) & x \in \mathbf{R}. \end{cases}$$

- φ est C^∞ sur \mathbf{D} ;
- φ est continue sur $\bar{\mathbf{D}}$;
- $\varphi = g$ sur $\partial\mathbf{D}$;
- φ est harmonique sur \mathbf{D} .

Solution du problème de Dirichlet pour le disque : preuve

Soient $f_1(z) = \frac{c_0(g)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n(g)z^n$, $f_2(z) = \frac{c_0(g)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}(g)z^n$
 et $F : \bar{\mathbf{D}} \rightarrow \mathbf{C}$ définie par

$$F(z) = \begin{cases} f_1(z) + f_2(\bar{z}) & \text{pour } z \in \mathbf{D} \\ g(z) & \text{pour } z \in \mathbf{S}^1. \end{cases}$$

Par la Proposition 16, f_1 et f_2 sont holomorphes sur \mathbf{D} , F est continue sur $\bar{\mathbf{D}}$ et $F|_{\mathbf{S}^1} = g$. De plus, F est à valeurs réelles, car g est à valeurs réelles.

Solution du problème de Dirichlet pour le disque : preuve

On a $\varphi(r \cos t, r \sin t) = F(re^{it})$ et $\varphi(\cos t, \sin t) = g(e^{it}) = F(e^{it})$ pour tout $0 \leq r < 1$ et $t \in \mathbf{R}$. On a donc

$$\forall z = x + iy \in \bar{\mathbf{D}} : \quad \varphi(x, y) = F(z).$$

Il s'ensuit que φ est C^∞ sur \mathbf{D} , continue sur $\bar{\mathbf{D}}$ et que $\varphi = g$ sur $\partial\mathbf{D}$. Comme F est à valeurs réelles, on a

$$\forall z = x + iy \in \bar{\mathbf{D}} : \quad \varphi(x, y) = \operatorname{Re}\varphi(x, y) = \operatorname{Re}F(z) = \operatorname{Re}f_1(z) + \operatorname{Re}f_2(\bar{z}).$$

Par le lemme et son corollaire, $\operatorname{Re}f_1$ et $z\operatorname{Re}f_2(\bar{z})$ sont harmoniques. Donc φ est harmonique.

Equirépartition à la Weyl

Soit $\theta \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$. Comme il est bien connu (“principe des tiroirs de Dirichlet”) que la suite $(\{n\theta\})_{n \in \mathbf{N}}$ est dense dans $[0, 1]$. (On rappelle que $\{x\} \in [0, 1]$ désigne la partie fractionnaire de $x \in \mathbf{R}$.) De manière équivalente, la suite $(e^{2\pi i k \theta})_{k \in \mathbf{N}}$ est dense dans \mathbf{S}^1 . Nous allons voir que $(\{n\theta\})_{n \in \mathbf{N}}$ possède une propriété beaucoup plus forte.

Definition

On dit qu’une suite $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ de nombres dans $[0, 1]$ est **équirépartie** si, pour tout $0 \leq a < b \leq 1$, on a

$$\frac{1}{n} \text{Card} \{k \in \{0, \dots, n-1\} \mid u_k \in [a, b]\} \rightarrow_{n \rightarrow +\infty} b - a$$

Remarque

Soit $(r_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une énumération des nombres rationnels dans $[0, 1[$. Soit $u_n = \begin{cases} r_{n/2} & \text{pour } n \text{ pair} \\ 0 & \text{pour } n \text{ impair} \end{cases}$. Alors $(u_n)_n$ est dense dans $[0, 1[$ (évident) mais n’est pas équirépartie (car, par exemple, $\frac{1}{n} \text{Card} \{k \in \{0, \dots, n-1\} \mid u_k \in [0, 1/10]\} \geq \frac{n-1}{2n} \rightarrow_{n \rightarrow \infty} 1/2$).

Théorème 7 (Théorème d'équirépartition de Weyl)

Soit $\theta \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$. La suite $(\{n\theta\})_{n \in \mathbf{N}}$ est équirépartie dans $[0, 1]$.

La preuve est basée sur le critère suivant d'équidistribution.

Théorème 8 (Critère d'équirépartition de Weyl)

Soit $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite dans $[0, 1[$. Supposons que

$$\forall k \in \mathbf{Z} \setminus \{0\} : \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} e^{2\pi i k u_n} \rightarrow_{N \rightarrow +\infty} 0$$

Alors $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est équirépartie dans $[0, 1]$.

Déduction du Théorème d'équirépartition de Weyl

Soit $k \in \mathbf{Z} \setminus \{0\}$. Alors $e^{2\pi i k \theta} \neq 1$, car θ est irrationnel. On a alors

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} e^{2\pi i k \{n\theta\}} \right| &= \left| \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} (e^{2\pi i k \theta})^n \right| \\ &= \left| \frac{1}{N} \frac{1 - e^{2\pi i k N \theta}}{1 - e^{2\pi i k \theta}} \right| \\ &\leq \frac{1}{N} \frac{2}{1 - |e^{2\pi i k \theta}|} \end{aligned}$$

et donc $\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} e^{2\pi i k \{n\theta\}} \rightarrow_{N \rightarrow +\infty} 0$.

Preuve du Critère d'équirépartition de Weyl

Soit $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite dans $[0, 1[$. Supposons que

$$\forall k \in \mathbf{Z} \setminus \{0\} : \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} e^{2\pi i k u_n} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0$$

Remarquons que $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est équirépartie si et seulement si, pour tout intervalle fermé $I \subset [0, 1]$, on a

$$(*) \quad \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \mathbf{1}_I(u_n) \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \int_0^1 \mathbf{1}_I(t) dt$$

L'idée est de prouver d'abord que

$$(**) \quad \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f(u_n) \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \int_0^1 f(t) dt$$

pour toute $f : [0, 1] \rightarrow \mathbf{C}$ continue et 1-périodique et d'en déduire (*) par approximation.

Critère d'équirépartition de Weyl : preuve de (**)

Pour tout $N \in \mathbf{N}^*$, soit $G_N : C_{1\text{-per}}(\mathbf{R}) \rightarrow \mathbf{C}$ la forme linéaire définie par

$$G_N(f) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f(u_n) - \int_0^1 f(t) dt.$$

Comme

$$|G_N(f)| \leq \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} |f(u_n)| + \int_0^1 |f(t)| dt \leq \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \|f\|_\infty + \|f\|_\infty,$$

G_N est continue de norme $\|G_N\| \leq 2$. Posons $e_k(t) := e^{2\pi ikt}$ pour $k \in \mathbf{Z}$ et $t \in [0, 1]$. Il est clair que $G_N(e_0) = 0$. Par hypothèse, on a :

$$\forall k \in \mathbf{Z} \setminus \{0\} : G_N(e_k) \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0.$$

Théorème d'équirépartition de Weyl : preuve de (**)

De ce qui précède, on a $G_N(f) \rightarrow_{N \rightarrow +\infty} 0$, pour tout $f \in \text{Trig}([0, 1]) = \text{Vect}\{e_k : k \in \mathbf{Z}\}$. Par le Théorème de Fejer, $\text{Trig}([0, 1])$ est dense dans $C_{1\text{-per}}(\mathbf{R})$. Comme $(\|G_N\|)_N$ est bornée, il s'ensuit que

$$\forall f \in C_{1\text{-per}}(\mathbf{R}), \quad G_N(f) \rightarrow_{N \rightarrow +\infty} 0.$$

Ceci démontre (**).

Critère d'équirépartition de Weyl : preuve de (*)

Soit $0 \leq a < b \leq 1$. Fixons $\varepsilon > 0$. On peut trouver $f_+, f_- \in C_{1\text{-per}}(\mathbf{R})$ avec les propriétés suivantes :

- $0 \leq f_- \leq 1, 0 \leq f_+ \leq 1$
- $f_- \leq \mathbf{1}_{[a,b]} \leq f_+$.
- $(b-a) - \varepsilon \leq \int_0^1 f_-(t) dt \leq \int_0^1 f_+(t) dt \leq (b-a) + \varepsilon$

On a

$$\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f_-(u_n) \leq \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \mathbf{1}_I(u_n) \leq \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f_+(u_n).$$

Il existe N_0 tel que

$$\forall N \geq N_0 : |G_N(f_-)| \leq \varepsilon \text{ et } |G_N(f_+)| \leq \varepsilon.$$

Critère d'équirépartition de Weyl : preuve de (*)

On a donc

$$\int_0^1 f_-(t) dt - \varepsilon \leq \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \mathbf{1}_I(u_n) \leq \int_0^1 f_+(t) dt + \varepsilon$$

et par conséquent

$$(b-a) - 2\varepsilon \leq \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \mathbf{1}_I(u_n) \leq (b-a) + 2\varepsilon$$

pour tout $N \geq N_0$.

Quelques références bibliographiques sur les séries de Fourier

- T. W. Körner : Fourier Analysis. Cambridge University Press, 1988.
- W. Rudin : Analyse Réelle et Complexe. Masson, 1975.
- E. Stein et R. Shakarchi : Fourier Analysis, Princeton University Press, 2003
- C. Zuily et H. Queffélec : Analyse pour l'agrégation. Dunod, 2007